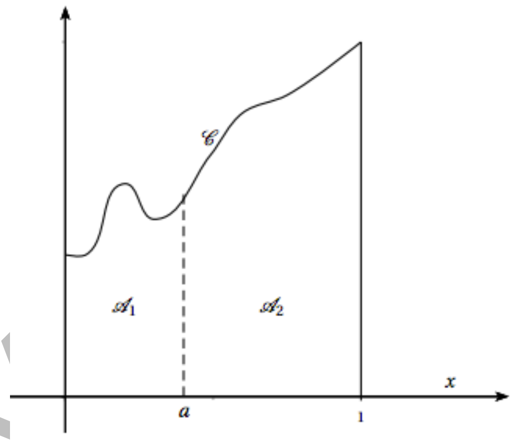
Fiche 2 ➥ intégration & primitives

Exercice 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$, continue et positive sur cet intervalle, et a un réel tel que $0<a<1$.

On note :
- Cf la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal
- $\mathcal{A}_1$ l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses et la courbe Cf d'une part, les droites d'équations $x=0$ et $x=a$ d'autre part.



Le but de cet exercice est de déterminer, pour différentes fonctions f, une valeur du réel a vérifiant la condition (E) : « les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont égales ».

On admet l'existence d'un tel réel a pour chacune des fonctions considérées/

Partie A : étude de quelques exemples

1) Vérifier que dans les cas suivants, la condition (E) est remplie pour un unique réel a et déterminer sa valeur.

a/ f est une fonction constante strictement positive.

b/ f est définie sur $[0;1]$ par $f(x)=x$.

2) a/ À l'aide d'intégrales, exprimer, en unités d'aires, les aires $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$.

b/ On note F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0;1]$.

Démontrer que si le réel a satisfait la condition (E), alors $F(a)=\dfrac{F(0)+F(1)}{2}$.

La réciproque est-elle vraie ?

3) Dans cette question, on envisage deux autres fonctions particulières.

a/ La fonction f est définie pour tout réel x de $[0;1]$ par $f(x)=e^x$.

Vérifier que la condition (E) est vérifiée pour un unique réel a et donner sa valeur.

b/ La fonction f est définie pour tout réel x de $[0;1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

Vérifier que la valeur $a=\dfrac{2}{5}$ convient.

Partie B : utilisation d'une suite pour déterminer une valeur approchée de a

Dans cette partie, on considère la fonction f définie pour tout réel de $[0;1]$ par $f(x)=4-3x^2$.

1) Démontrer que si a est un réel satisfaisant la condition (E), alors a est solution de l'équation : $x=\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{3}{8}$.

Dans la suite de l'exercice, on admettra que cette équation a une unique solution dans l'intervalle $\left[0\,;1\right]$. On note a cette solution.

2) On considère la fonction g définie pour tout réel x de $\left[0\,;1\right]$ par $g\left(x\right)=\dfrac{x^3}{4}+\dfrac{3}{8}$ et la suite $\left(u_n\right)$ définie par :

$u_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=g\left(u_n\right)$.

a/ Calculer u_1.

b/ Démontrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;1\right]$.

c : Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0\le u_n\le u_{n+1}\le 1$.

d/ Prouver que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente. À l'aide des opérations sur les limites, prouver que la limite est a.

e/ On admet que le réel a vérifie l'inégalité $0<a-u_{10}<10^{-9}$. Calculer u_{10} à 10^{-8} près.

Exercice 2

Un hélicoptère est en vol stationnaire au-dessus d'une plaine. Un passager lâche verticalement un colis muni d(un parachute.

Partie 1

Soit v_1 la fonction définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par : $v_1\left(t\right)=5\times\dfrac{e^{0,3t}-1}{e^{0,3t}+1}$.

1) Déterminer le sens de variation de la fonction v_1.

2) On suppose, dans cette question, que le parachute fonctionne correctement. On admet que t secondes après qu'il a été lâché, la vitesse du colis (exprimée en $m\cdot s^{-1}$) est égale, avant d'atteindre le sol, à $v_1\left(t\right)$.

On considère que le colis arrive en bon état sur le sol si sa vitesse à l'arrivée n'excède pas $6\,m\cdot s^{-1}$.
Le colis risque-t-il d'être endommagé lorsque le parachute s'ouvre correctement ? Justifier.

Partie 2

On suppose, dans cette partie, que le parachute ne s'ouvre pas. On admet que dans ce cas, avant que le colis atteigne le sol, sa vitesse (exprimée en $m\cdot s^{-1}$), t secondes après avoir été lâché par le passager, est donnée par :

$$v_2\left(t\right)=32,7\left(1-e^{-0,3t}\right)$$

1) Quelle est la vitesse en $m\cdot s^{-1}$, atteinte par le colis au bout de 10 secondes ? Arrondir à $0,1\,m\cdot s^{-1}$.

2) Résoudre l'équation $v_2\left(t\right)=30\,m\cdot s^{-1}$. Donner une interprétation concrète de la solution de cette équation dans le cadre de cet exercice.

3) On sait que la chute du colis dure 20 secondes. On admet que la distance, en mètres, qui sépare l'hélicoptère du colis, T secondes après avoir été lâché par le passager , est donnée par :

$$d\left(t\right)=\int_0^T v_2\left(t\right)dt\,.$$

a/ Montrer que, pour tout réel T de l'intervalle $\left[0\,;20\right]$, $d\left(T\right)=109\left(e^{-0,3T}+0,3T-1\right)$.

b/ Déterminer une valeur approchée à 1 m près de la distance parcourue par le colis lorsqu'il atteint le sol.

4) Déterminer un encadrement d'amplitude $0,1\,s$ du temps mis par le colis pour atteindre le sol si on l'avait lâché d'une hauteur de 700 mètres.