Fiche d'exercices n°5 : le corrigé

Exercice 1

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{Z}$: $n^2 - 2n + 3 \equiv 0 [4]$.

Cet exercice propose de mettre en évidence une méthode rapide de la recherche des solutions.

1) Restes possibles de la division euclidienne de n par 4 : $0, 1, 2, 3$.

2) Tableau des congruences :

Restes de la division euclidienne de n par 4	0	1	2	3
n est congru à ... modulo 4	0	1	2	3
n^2 est congru à ... modulo 4	0	1	0	1
$-2n$ est congru à ... modulo 4	0	-2	0	-2
$n^2 - 2n$ est congru à ... modulo 4	0	-1	0	-1
$n^2 - 2n + 3$ est congru à ... modulo 4	3	2	3	2

3) D'après le tableau précédent, l'équation $n^2 - 2n + 3 \equiv 0 [4]$, n'admet aucune solution.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1➤ • Résolution de l'équation $3x \equiv 7 [9]$: on dresse un tableau de congruences modulo 9.

remarque : *en général, on construit un tableau sous une forme plus rapide que dans l'exercice 1.*

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$3x$	0	3	6	0	3	6	0	3	6

conclusion : l'équation $3x \equiv 7 [9]$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

• Résolution de l'équation $4x \equiv 2 [5]$:on dresse un tableau de congruences modulo 5.

x	0	1	2	3	4
$4x$	0	4	3	2	1

conclusion : $S = \{5k + 3 ; k \in \mathbb{Z}\}$

• Résolution de l'équation $2x \equiv 6 [8]$: on dresse le tableau de congruences modulo 8.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
$2x$	0	2	4	6	0	2	4	6

conclusion : $S = \{8k + 3 ; 8k + 7 ; k \in \mathbb{Z}\}$

2➤ a/ On a : $8 \equiv 2[6]$; $-9 \equiv 3[6]$; $19 \equiv 1[6]$.

Il en résulte immédiatement que $8n^2 - 9n + 19 \equiv 0[6] \Leftrightarrow 2n^2 + 3n + 1 \equiv 0[6]$

b/ Résoudre $8n^2 - 9n + 19 \equiv 0[6]$ revient donc à résoudre $2n^2 + 3n + 1 \equiv 0[6]$.

Dressons le tableau de congruences modulo 6 :

n	0	1	2	3	4	5
n^2	0	1	4	3	4	1
$2n^2$	0	2	2	0	2	2
$3n$	0	3	0	3	0	3
$2n^2+3n+1$	1	0	3	4	3	0

conclusion : $S = \{6k+1 ; 6k+5 ; k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 3

Partie 1

1) Restes respectifs de $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ dans la division euclidienne par 7 :

$2 = 0\times7+2 \quad d'où \quad 2 \equiv 2[7]$

$2^2 = 4 = 0\times7+4 \quad d'où \quad 2^2 \equiv 4[7]$

$2^3 = 8 = 1\times7+1 \quad d'où \quad 2^3 \equiv 1[7]$

$2^4 = 16 = 2\times7+2 \quad d'où \quad 2^4 \equiv 2[7]$

$2^5 = 32 = 4\times7+4 \quad d'où \quad 2^5 \equiv 4[7]$

$2^6 = 64 = 9\times7+1 \quad d'où \quad 2^6 \equiv 1[7]$

2) Restes respectifs de $2^{3k}, 2^{3k+1}, 2^{3k+2}$ dans la division euclidienne par 7 :

$2^{3k} = (2^3)^k \quad ; \quad 2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1^k[7] \equiv 1[7]$

$2^{3k+1} = (2^3)^k \times 2 ; \quad 2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k+1} \equiv 1\times2[7] \equiv 2[7]$

$2^{3k+2} = (2^3)^k \times 4 ; \quad 2^{3k} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3k+2} \equiv 1\times4[7] \equiv 4[7]$

conclusion : dans la division euclidienne par 7, 2^{3k} a pour reste 1, 2^{3k+1} a pour reste 2, 2^{3k+2} a pour reste 4

3) $2^{55} = 2^{18\times3+1} \equiv 2[7]$; le reste de 2^{55} dans la division euclidienne par 7 est 2.

Partie 2

➤

$5 = 0\times12+5 \quad d'où \quad 5 \equiv 5[12]$

$5^2 = 2\times12+1 \quad d'où \quad 5^2 \equiv 1[12]$

$5^3 = 10\times12+5 \quad d'où \quad 5^3 \equiv 5[12]$

$5^4 = 52\times12+1 \quad d'où \quad 5^4 \equiv 1[12]$

On en déduit que :

$5^{2k} = (5^2)^k \quad ; \quad 5^2 \equiv 1[12] \Rightarrow 5^{2k} \equiv 1^k[12] \equiv 1[12]$

$5^{2k+1} = (5^2)^k \times 5 \quad ; \quad 5^{2k} \equiv 1[12] \Rightarrow 5^{2k+1} \equiv 1\times5[12] \equiv 5[12]$

$5^{789} = 5^{788+1} = 5^{2\times394+1} \equiv 5[12]$; le reste de la division euclidienne de 5^{789} par 12 est 5.

Exercice 4

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10, ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
objectif : déterminer les entiers naturels N divisibles par 7.

1) $10 = 1 \times 7 + 3$. Cad : $10 \equiv 3[7]$. On a alors : $10^3 \equiv 3^3[7] \equiv 27[7] \equiv 6[7] \equiv -1[7]$. **CQFD**

2) $10^3 \equiv -1[7] \Rightarrow a \times 10^3 \equiv -a[7] \Rightarrow N = a \times 10^3 + b \equiv -a + b[7]$

$7 | N \Leftrightarrow N \equiv 0[7] \Leftrightarrow b - a \equiv 0[7] \Leftrightarrow 7 | b - a$

On en déduit le tableau suivant :

Valeur de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Valeurs de a	7	1 ou 8	2 ou 9	3	4	5	6	7	1 ou 8	2 ou 9

conclusion : les entiers naturels N divisibles par 7 sont :
$\overline{7000}\,;\overline{1001}\,;\overline{8001}\,;\overline{2002}\,;\overline{9002}\,;\overline{3003}\,;\overline{4004}\,;\overline{5005}\,;\overline{6006}\,;\overline{7007}\,;\overline{1008}\,;\overline{8008}\,;\overline{2009}\,;\overline{9009}$

Exercice 5

On note $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B$ les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.
$\overline{BA7}^{12} = B \times 12^2 + A \times 12^1 + 7 \times 12^0 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 7 \times 12^0 = 1711$ en base 10.

1) a/ $N_1 = \overline{B1A}^{12} = 11 \times 12^2 + 1 \times 12^1 + 10 \times 12^0 = 1606$ en base 10.

b/

$$\begin{array}{llll} 1131 & \underline{|\,12} & & \\ {\color{blue}3} & |\,94 & \underline{|\,12} & \\ & {\color{blue}10} & |\,7 & \underline{|\,12} \\ & & {\color{blue}7} & |\,0 \end{array}$$

On en déduit que : $N_2 = 7 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 3 \times 12^0 = \overline{7A3}^{12}$.

2) a/ Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{12} = a_n \times 12^n + a_{n-1} \times 12^{n-1} + \ldots + a_1 \times 12^1 + a_0 \times 12^0$.

$$12 \equiv 0[3] \Rightarrow \forall k \in \{1; 2; \ldots; n\},\ 12^k \equiv 0[3]$$
$$\Rightarrow \forall k \in \{1; 2; \ldots; n\},\ a_k \times 12^k \equiv a_k \times 0[3] \equiv 0[3]$$
$$\Rightarrow a_n \times 12^n + a_{n-1} \times 12^{n-1} + \ldots + a_1 \times 12^1 = \sum_{k=1}^{n} a_k \times 12^k \equiv 0[3]$$
$$\Rightarrow N = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \times 12^k \equiv a_0 + 0[3] \equiv a_0[3]$$

On sait que $3 | N \Leftrightarrow N \equiv 0[3]$. On en déduit qu'un nombre $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{12}$ est divisible par 3 si son dernier chiffre a_0 est égale à 0, 3, 6 ou 9.

Ainsi : Soit $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{12}$

$3 | N \Leftrightarrow N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 0}^{12}$ *ou* $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 3}^{12}$ *ou* $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 6}^{12}$ *ou* $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 9}^{12}$

b/ $N_2 = \overline{7A3}^{12}$. Donc $3 | N_2$.

Vérification : en base 10, $N_2 = 1131 \quad et \quad 1+1+3+1=6 \; donc \quad 3 | N_2$.

3) a/ On a encore : $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{12}$.

$12 \equiv 1[11] \Rightarrow \forall k \in \{1;2;\ldots;n\}, \quad 12^k \equiv 1^k[11] \equiv 1[11]$

$\Rightarrow \forall k \in \{1;2;\ldots;n\}, \quad a_k \times 12^k \equiv a_k[11]$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \times 12^k \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n[11]$

On en déduit que $N = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k \times 12^k \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n[11]$

Ainsi 11 divise N si et seulement si la somme de ses chiffres (dans son écriture en base 12) est un multiple de 11.

Ainsi : $11 | N \Leftrightarrow a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 11k \, , k \in \mathbb{Z}$

b/ $N_1 = \overline{B1A}^{12}$; $B+1+A = 11+1+10 = 22$, donc $11 | N_1$.

Vérification : en base 10, $N_1 = 1606 = 11 \times 146$. Donc $11 | N_1$ est vérifié.

4) Soit $N = \overline{x4y}^{12}$; $33 | N \Leftrightarrow 3 | N \; et \; 11 | N \Leftrightarrow \begin{cases} y \; égale \; 0, 3, 6 \; ou \; 9 \\ 11 | x+4+y \end{cases}$

- si $y=0$ alors $33 | \overline{x4y}^{12} \Leftrightarrow \overline{x4y}^{12} \; égale \quad \overline{740}^{12} \quad ou \quad \overline{443}^{12} \quad ou \quad \overline{146}^{12} \quad ou \quad \overline{949}^{12}$
- si $y=3$ alors $11 | x+7 \; et \; x \in \{0, 1, \ldots, 11\} \; donc \; x=4$
- si $y=6$ alors $11 | x+10 \; et \; x \in \{0, 1, \ldots, 11\} \; donc \; x=1$
- si $y=9$ alors $y=9 \quad 11 | x+13 \; et \; x \in \{0, 1, \ldots, 11\} \; donc \; x=9$

conclusion : $33 | \overline{x4y}^{12} \Leftrightarrow \overline{x4y}^{12} \; égale \quad \overline{740}^{12} \quad ou \quad \overline{443}^{12} \quad ou \quad \overline{146}^{12} \quad ou \quad \overline{949}^{12}$