Fiche d'exercices n°1

Exercice 1

Partie A

1) On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Soit E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 : $E = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$

2 est premier, ainsi, il existe $i \in \{1;2;\ldots;n\}$ tel que $p_i = 2$.

On a alors : $E = \underbrace{p_1 \times p_2 \times \ldots \times 2 \times \ldots \times p_n}_{>2} + 1 \geq 2$.

Supposons à présent qu'il existe $k \in \{1;2;\ldots;n\}$ tel que $p_k | E$; on a alors :

$$\left.\begin{array}{l} p_k | E \\ p_k | p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k \times \ldots \times p_n \end{array}\right\} alors\ p_k | E - p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k \times \ldots \times p_n \ cad\ p_k | 1 \quad d'où\ p_k = 1$$

Or on sait que $\forall i \in \{1;2;\ldots;n\}$, $p_i \geq 2$. Ainsi $p_k = 1$ est absurde.

Il en résulte que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

2) Puisque $E \geq 2$ alors E admet un diviseur premier ; il existe donc $j \in \{1;2;\ldots;n\}$ tel que $p_j | E$ ce qui contredit la résultat précédent.
Conclusion : l'ensemble des nombres premiers est infini.

Partie B

Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$. On dit que M_k est le k-ième nombre de Mersenne.

1) a /

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3	7	15	31	63	127	255	511	1023

b / Dans le tableau précédent, on observe que 2, 3, 5, 7 sont premiers et M_2, M_3, M_5, M_7 le sont aussi.
On peut donc conjecturer que si k est premier, alors le nombre M_k est premier.

2) Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a / $1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + + (2^p)^{q-1}$ est la somme des q premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2^p ; ainsi :

$$1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + + (2^p)^{q-1} = 1 \times \frac{1 - (2^p)^q}{1 - 2^p} = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1}$$

b / Notons $S = 1 + 2^p + (2^p)^2 + (2^p)^3 + \ldots + + (2^p)^{q-1}$, on a alors :

$$S = \frac{(2^p)^q - 1}{2^p - 1} \Leftrightarrow (2^p)^q - 1 = S(2^p - 1) \Leftrightarrow 2^{pq} - 1 = S(2^p - 1)$$; ainsi : $2^p - 1 | 2^{pq} - 1$.

c / Soit $k \geq 2$ non premier, alors k admet un diviseur p autre que 1 et lui-même : il existe donc q entier tel que $k = pq$. On a donc $M_k = 2^k - 1 = 2^{pq} - 1$; d'après la question précédente, $2^p - 1 | M_k$.
D'où M_k non premier.

3) a / $M_{11} = 2047 = 23 \times 89$, donc M_{11} n'est pas premier.

b / 11 est premier et M_{11} n'est pas premier, ce qui contredit l'hypothèse émise au ***1)*** b/.

Partie C

Test de Lucas-Lehmer : M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0[M_n]$; avec (u_n) suite définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^2 - 2$

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre
Cette propriété est admise dans la suite.

1) D'après le test de Lucas-Lehmer, M_5 premier si et seulement si $u_3 \equiv 0[M_5]$. Calculons u_3 :

$$u_1 = u_0^2 - 2 = 4^2 - 2 = 14$$
$$u_2 = u_1^2 - 2 = 14^2 - 2 = 194$$
$$u_3 = u_2^2 - 2 = 194^2 - 2 = 37\,634$$

$u_3 = 37\,634 = 31 \times 1214$, d'où : $u_3 \equiv 0[31]$ cad $u_3 \equiv 0[M_5]$. On en déduit que M_5 est premier.

2)

Variables :	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation :	u prend la valeur 4
Traitement :	Demander un entier $n \geq 3$ M prend la valeur $2^n - 1$ Pour i allant de 1 à $n-2$ faire u prend la valeur $u^2 - 2$ Fin Pour Si M divise u alors afficher : « M non premier » sinon afficher « M premier »

Exercice 2

prérequis : si p est un nombre premier et a un entier naturel non divisible par p, alors : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

(Cette propriété est connue sous le nom de Petit théorème de Fermat)

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :

$u_0 = 1$ et , pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n + 21$.

1) $u_1 = 10u_0 + 21 = 10 \times 1 + 21 = 31$ $u_2 = 10u_1 + 21 = 10 \times 31 + 21 = 331$ $u_3 = 10u_2 + 21 = 10 \times 331 + 21 = 3331$

2) a / Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $3u_n = 10^{n+1} - 7$:

Initialisation : pour $n = 0$, $\left.\begin{array}{r} 10^{0+1} - 7 = 10 - 7 = 3 \\ 3u_0 = 3 \times 1 = 3 \end{array}\right\} d'où : \; 3u_0 = 10^{0+1} - 7$

La pté est initialisée.

Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$:

$$3u_{n+1} = 3(10u_n + 21) = 10 \times 3u_n + 3 \times 21 = 10(10^{n+1} - 7) + 63 = 10^{n+2} - 70 + 63 = 10^{n+2} - 7$$

La pté est héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3u_n = 10^{n+1} - 7$

b / On a alors :

$$3u_n=\left(10^{n+1}-1\right)-6 \Leftrightarrow u_n=\frac{1}{3}\underbrace{\left(10^{n+1}-1\right)}_{\underbrace{99\ldots9}_{n+1\ \text{chiffres}}}-6=\underbrace{33\ldots3}_{n+1\ \text{chiffres}}-2=\underbrace{33\ldots3}_{n\ \text{chiffres}}1$$

$$D'où\quad \boxed{u_n=3\times10^n+3\times10^{n-1}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1+1}$$

3) $u_2=331$. Supposons u_2 non premier, il admet alors au moins un diviseur premier p tel que $p\leq\sqrt{331}$ cad $p\leq 18$. Or les nombres premiers $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17$ ne divisent pas 331. D'où u_2 premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4) Démontrons que, pour tout entier naturel n, u_n n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5 :

On sait que : $u_n=3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1+1$

$$\begin{aligned}10\equiv0[2]\Rightarrow 10^k\equiv0[2]&\\ &\Rightarrow 3\times10^k\equiv0[2]\quad \forall k\in\{1;2;\ldots;n\}\\ &\Rightarrow 3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1\equiv0[2]\\ &\Rightarrow u_n=3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1+1\equiv1[2]\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}10\equiv1[3]\Rightarrow 10^k\equiv1[3]&\\ &\Rightarrow 3\times10^k\equiv3[3]\equiv0[3]\quad \forall k\in\{1;2;\ldots;n\}\\ &\Rightarrow 3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1\equiv0[3]\\ &\Rightarrow u_n=3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1+1\equiv1[3]\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}0\equiv0[5]\Rightarrow 10^k\equiv0[5]&\\ &\Rightarrow 3\times10^k\equiv0[5]\equiv0[5]\quad \forall k\in\{1;2;\ldots;n\}\\ &\Rightarrow 3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1\equiv0[5]\\ &\Rightarrow u_n=3\times10^{n-1}+3\times10^{n-2}+\ldots+3\times10^2+3\times10^1+1\equiv1[5]\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5) a / $\forall n\in\mathbb{N}$, $3u_n=10^{n+1}-7$

$$\left.\begin{aligned}10\equiv10[11]\equiv-1[11]\Rightarrow 10^{n+1}\equiv(-1)^{n+1}[11]\\ -7\equiv-7[11]\equiv4[11]\end{aligned}\right\}\Rightarrow 10^{n+1}-7\equiv4+(-1)^{n+1}[11]\equiv4+(-1)(-1)^n[11]\equiv4-(-1)^{n+1}[11]$$

conclusion : $3u_n\equiv4-(-1)^n[11]$

b / On a alors : $(-1)^n\equiv\begin{cases}1[11]\ si\ n\ pair\\ -1[11]\ si\ n\ impair\end{cases}\Rightarrow -(-1)^n\equiv\begin{cases}-1[11]\ si\ n\ pair\\ 1[11]\ si\ n\ impair\end{cases}\Rightarrow 4-(-1)^n\equiv\begin{cases}3[11]\ si\ n\ pair\\ 5[11]\ si\ n\ impair\end{cases}$

conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, 11 ne divise pas $3u_n$; à fortiori, 11 ne divise par u_n.

6) a / Démontrons l'égalité : $10^{16}\equiv1[17]$:

$$\left.\begin{aligned}&17\ premier\\ &10\ non\ divisible\ par\ 17\end{aligned}\right\}alors\ d'après\ le\ petit\ th\ de\ Fermat, 10^{17-1}\equiv1[17]\ cad\ 10^{16}\equiv1[17].$$

b /

$$\left.\begin{array}{r} 10^{16} \equiv 1[17] \Rightarrow \left(10^{16}\right)^k \equiv 1^k[17] \equiv 1[17] \\ 10^9 \equiv 7[17] \end{array}\right\} \Rightarrow 10^{16k+9} \equiv 7[17] \Rightarrow 10^{16k+9} - 7 \equiv 0[17]$$

Ainsi : $\left.\begin{array}{l} 17 | 3u_n \\ et \ \text{pgcd}(3,17)=1 \end{array}\right\} alors\ d'après\ le\ th.\ de\ Gauss, \quad 17 | u_n$ **cqfd.**