Terminale S

Ch.11

La fonction logarithme népérien

I. La fonction logarithme népérien

1 / Définition et propriétés

Propriété

Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ appelée logarithme népérien de a, et notée $x = \ln a$.

Démonstration

Soit a un réel strictement positif. La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$: on la note $x = \ln a$.

Exemples

- $e^x = 1$ admet une solution unique : $x = \ln 1 = 0$ (on sait que $e^0 = 1$).
- $e^x = e$ admet une solution unique : $x = \ln e = 1$ (on sait que $e^1 = e$).

Définition

La fonction logarithme népérien est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, qui à tout $x > 0$ associe $\ln x$ c'est-à-dire l'unique réel dont l'exponentielle est x.

$$\begin{array}{rl} \ln : &]0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \ln x \end{array}$$

Propriétés

❶ Pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a : $y = \ln x \Leftrightarrow e^y = x$.

En particulier, on a :

❷ pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\ln\left(e^x\right) = x$;

❸ pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.

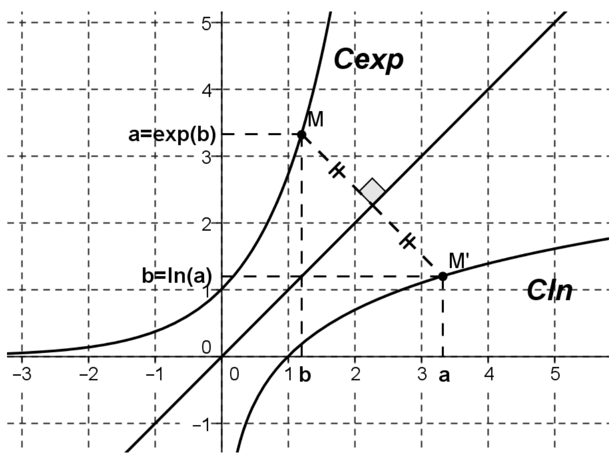
Remarque

la propriété ❶ découle de la définition et de la 1ère propriété énoncée.
Si $\ln x = y$ alors *(déf)* $e^y = e^{\ln x} = x$. Réciproquement, si $x = e^y$ alors *(pté)* $y = \ln x$.

Conséquence graphique (voir activité d'introduction)

$M(b\,;a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction exponentielle , ou encore $a = e^b$, revient à dire que $b = \ln a$, c'est-à-dire que le point $M'(a\,;b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction $\ln$. On a vu en activité que les deux courbes sont symétriques par rapport à la première bissectrice, la droite d'équation $y = x$.

On dit que les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des fonctions réciproques.



Exercice 1 ▶ *utiliser le lien entre les fonctions* $\ln$ *et* $\exp$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $\ln(x-1)^2 = 2+\ln(x-1)$.

Éléments de solution

On détermine d'abord l'ensemble de définition de (E).

L'équation (E) est définie ssi $x-1>0$ cad ssi $x>1$

(E) s'écrit : $\ln(x-1)^2-\ln(x-1)-2=0$.

On pose $X=\ln(x-1)$: on obtient : $X^2-X-2=0$ ($\Delta=9$, deux solutions distinctes)

Les solutions dans $\mathbb{R}$ sont : $X_1=-1$ et $X_2=2$. (*On utilise alors la pté* ❶)

$X_1=\ln(x_1-1)=-1 \Leftrightarrow x_1-1=e^{-1}$ $\qquad$ $X_2=\ln(x_2-1)=2 \Leftrightarrow x_2-1=e^2$

$\Leftrightarrow x_1=e^{-1}+1$ $\qquad$ $\Leftrightarrow x_2=e^2+1$

(*On vérifie que les solutions appartiennent à l'ensemble de définition de* (E))

On obtient : $S=\left\{1+\dfrac{1}{e}\,;1+e^2\right\}$

Exercice 2

▶ Étudier les variations de la fonction définie sur ° par : $f(x)=\dfrac{e^x}{e^{2x}+2}$. *(Étude des limites non demandée)*

Solution

● La fonction f est dérivable sur ° et : $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^{2x}+2\right)-2e^{2x}\times e^x}{\left(e^{2x}+2\right)^2}=\dfrac{e^{3x}+2e^x-2e^{3x}}{\left(e^{2x}+2\right)^2}=\dfrac{2e^x-e^{3x}}{\left(e^{2x}+2\right)^2}=\dfrac{e^x\left(2-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+2\right)^2}$.

$f'(x)$ a le signe de $2-e^{2x}$ donc :

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow 2-e^{2x}\geq 0 \Leftrightarrow e^{2x}\leq 2 \Leftrightarrow e^{2x}\leq e^{\ln 2} \Leftrightarrow 2x\leq \ln 2 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow x\leq \ln\sqrt{2}$.

● Tableau de variation de f

x	$-\infty$		$\ln\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	

$f\left(\ln\sqrt{2}\right)=\dfrac{e^{\ln\sqrt{2}}}{e^{2\ln\sqrt{2}}+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{e^{\ln\left(\sqrt{2}^2\right)}+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2+2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

2 / Sens de variation, applications

Propriété

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a<b$. On a $a=e^{\ln a}$ et $b=e^{\ln b}$; ainsi :

$e^{\ln a}<e^{\ln b}$ ce qui équivaut à $\ln a<\ln b$ (*en effet* $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$)

La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Propriétés

❶ Pour tout $a>0$ et tout $b>0$: .

- $\ln a=\ln b \Leftrightarrow a=b$
- $\ln a<\ln b \Leftrightarrow a<b$

(*résolution d'équations et inéquations avec* $\ln$)

❷ pour tout $x>0$:

- $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$
- $\ln x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$
- $\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

(*détermination du signe de* $\ln x$)

Exercice 3

1 / Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(5-2x)=1$.

2 / Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\ln(2-x)-\ln(x+3)\leq 0$

Solution

1 / L'équation est définie pour $5-2x>0$ c'est-à-dire $x<\frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned}\ln(5-2x)=1 &\Leftrightarrow \ln(5-2x)=\ln e\\ &\Leftrightarrow 5-2x=e\\ &\Leftrightarrow -2x=e-5\\ &\Leftrightarrow x=\frac{5-e}{2}\end{aligned}$$

$\frac{5-e}{2}\in\left]-\infty\,;\frac{5}{2}\right[$ d'où $S=\left\{\frac{5-e}{2}\right\}$

2 / l'équation est définie pour $2-x>0$ *et* $x+3>0 \Leftrightarrow x<2$ *et* $x>-3$.
Ainsi l'équation est définie pour tout réel x tel que $-3<x<2$.

$$\begin{aligned}\ln(2-x)-\ln(x+3)\leq 0 &\Leftrightarrow \ln(x+3)\geq\ln(2-x)\\ &\Leftrightarrow x+3\geq 2-x\\ &\Leftrightarrow 2x\geq -1\\ &\Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

En tenant compte de l'ensemble de définition, on obtient : $S=\left[-\frac{1}{2}\,;2\right[$.

II. Propriétés algébriques du logarithme népérien

Propriété fondamentale

Pour tout réel $a>0$ et $b>0$, on a : La fonction $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

Observation *: la fonction* $\ln$ *transforme les produits en sommes, la fonction* $\exp$ *transforme les sommes en produits et ces deux fonctions sont réciproques l'une de l'autre, tout cela est bien cohérent...*

Démonstration

Soit a et b deux réels strictement positifs.

On a d'une part : $a=e^{\ln a}$ et $b=e^{\ln b}$, donc $ab=e^{\ln a}\times e^{\ln b}=e^{\ln a+\ln b}$ (1)

On a d'autre part : $ab=e^{\ln ab}$ (2)

D'après (1) et (2), on peut écrire : $e^{\ln a+\ln b}=e^{\ln ab}$ d'où $\ln a+\ln b=\ln(ab)$.

Propriétés *(conséquence de la propriété fondamentale)*

Soit a et b deux réels strictement positifs et n un entier relatif.

❶ $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ ❷ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

❸ $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$ ❹ $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$

Démonstration

❶ $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right) = \ln 1 = 0$; on a aussi d'après la pté fondamentale, $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$.

Il en résulte que $\ln a + \ln\frac{1}{a} = 0$ d'où $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.

❷ $\ln\frac{a}{b} = \ln\left(a\times\frac{1}{b}\right) = \ln a + \underbrace{\ln\frac{1}{b}}_{-\ln b} = \ln a - \ln b$

❸ • Soit $n\in$ • . Démontrons par récurrence que $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.

Initialisation : $\ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0\times\ln a$; la pté est vérifiée au rang 0

. Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n : c'est-à-dire que $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.

Démontrons qu'elle vraie au rang $n+1$:

$\ln a^{n+1} = \ln\left(a^n\times a\right) = \underbrace{\ln a^n}_{n\ln a} + \ln a = n\ln a + \ln a = (n+1)\ln a$; la pté est héréditaire.

On a démontré que pour tout entier naturel n, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a$.

• Soit $n\in\mathbb{Z}^-$. On pose $n' = -n$, ainsi $n'\in\mathbb{N}$.

$\ln a^n = \ln a^{-n'} = \ln\frac{1}{a^{n'}} = -\ln a^{n'} = -n'\ln a = n\ln a$.

La pté est vérifiée pour tout n entier relatif.

❹ $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = \ln\left(\sqrt{a}\times\sqrt{a}\right) = \ln\sqrt{a} + \ln\sqrt{a} = 2\ln\sqrt{a}$. On a dès lors : $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Remarque

Ces propriétés sont souvent utilisées pour simplifier des expressions ou dans la résolution d'équations - inéquations. Le ❸ peut être exploité dans la détermination d'un seuil dans le cas des suites géométriques.

Exercice 4 *(questions indépendantes)*

1 ▸ Exprimer en fonction de $\ln 2$ les réels suivants : $\ln 8$; $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$; $\ln(16e)$; $\ln\sqrt{2}$; $\ln\left(\frac{64}{e^2}\right)$.

2 ▸ Simplifier les expressions suivantes :

$\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right]$; $\ln\left(\sqrt{7}+2\right)+\ln\left(\sqrt{7}-2\right)$; $\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)$.

3 ▸ Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{4}{5}$.

Déterminer l'indice n_0 tel que pour tout $n\geq n_0$, $u_n \leq 10^{-3}$.

Solution

1 ▸ • $\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2$. • $\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -\ln\left(2^2\right) = -2\ln 2$.

- $\ln(16e)=\ln e+\ln 16=1+\ln\left(2^4\right)=1+4\ln 2$.
- $\ln\left(\dfrac{64}{e^2}\right)=\ln 64-\ln e^2=\ln\left(2^6\right)-\ln e^2=-2\underbrace{\ln e}_{=1}+6\ln 2=-2+6\ln 2=2\left(-1+3\ln 2\right)$.

2 ▸ • $\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right]=\ln\left[\left(\sqrt{2}\right)^2-1^2\right]=\ln(2-1)=\ln 1=0$.

- $\ln\left(\sqrt{7}+2\right)+\ln\left(\sqrt{7}-2\right)=\ln\left[\left(\sqrt{7}+2\right)\left(\sqrt{7}-2\right)\right]=\ln\left[\left(\sqrt{7}\right)^2-2^2\right]=\ln(7-4)=\ln 3$.
- $\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)=\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}-3}\times\sqrt{\sqrt{11}+3}\right)=\ln\left(\sqrt{\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{11}+3\right)}\right)=\ln\left(\sqrt{\sqrt{11}^2-3^2}\right)$

  $=\ln\left(\sqrt{11-9}\right)=\ln\left(\sqrt{2}\right)=\dfrac{\ln 2}{2}$.

3 ▸ D'après les données, on a : $u_n=u_0\times q^n=\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$. On doit donc résoudre $\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\leq 10^{-3}$.

Tous les termes de la suite étant strictement positifs, cette inéquation est équivalente à :

$\ln\left[\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right]\leq\ln\left(10^{-3}\right)$ cad $n\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)\leq -3\ln(10)$. On a de plus $\dfrac{4}{5}<1$ donc $\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)<0$.

On obtient alors : $n\geq\dfrac{-3\ln 10}{\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)}$. À la calculatrice $\dfrac{-3\ln 10}{\ln\left(\dfrac{4}{5}\right)}\approx 30{,}96$, donc $n_0=31$.

III. Étude de la fonction $\ln$

1 / Continuité, dérivabilité

Propriété (admise)

La fonction $\ln$ est continue sur $]0\,;+\infty[$

Observation : *une démonstration guidée sera proposée sous forme d'exercice.*

Propriétés

- La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout $x>0$, $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$.
- La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration

Soit x et x_0 deus réels strictement positifs. Le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en x_0 est : $\tau(x_0)=\dfrac{\ln x-\ln x_0}{x-x_0}$.

Posons $X=\ln x$, $X_0=\ln x_0$; on a aussi $x=e^{\ln x}=e^X$ et $x_0=e^{\ln x_0}=e^{X_0}$. On a alors : $\tau(x_0)=\dfrac{X-X_0}{e^X-e^{X_0}}$.

La fonction $\ln$ étant continue sur $]0\,;+\infty[$, $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$ soit $\lim\limits_{x\to x_0}X=X_0$.

de plus la fonction $\exp$ étant dérivable en X_0, $\lim\limits_{X\to X_0}\dfrac{e^X-e^{X_0}}{X-X_0}=\exp'(X_0)=e^{X_0}=x_0$.

Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to x_0}\tau(x_0)=\lim\limits_{X\to X_0}\left(\dfrac{X-X_0}{e^X-e^{X_0}}\right)=\dfrac{1}{x_0}$. La fonction $\ln$ est donc dérivable et $\ln'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$

2 / Limites , courbe représentative

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

Démonstration

- Il s'agit de montrer que, pour tout réel A fixé, il existe x_0 tel que, si $x > x_0$, $\ln x > A$.

  Or $\ln x > A \Leftrightarrow x > e^A$, donc en posant $x_0 = e^A$, on obtient le résultat.

- Pour la limite en 0^+, on effectue un changement de variable, en posant $X = \dfrac{1}{x}$.

  On obtient alors d'une part: $\ln x = \ln \dfrac{1}{X} = -\ln X$. On a d'autre part : qd $x \to 0^+$, $X \to +\infty$

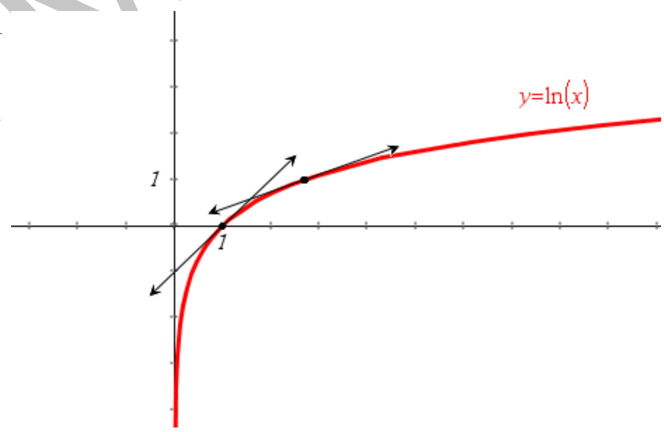
  Donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} \left[-\ln(X)\right] = -\infty$.

Remarque

La représentation graphique de la fonction $\ln$ admet donc l'axe des ordonnées d'équation $x = 0$ pour asymptote verticale.

Tableau de variation et courbe représentative de la fonction $\ln$

x	0		$+\infty$
$(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$	$\Vert$	$+$	
$\ln$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Équations des tangentes à la courbe aux points d'abscisses respectives 1 et e .

- $\ln 1 = 0$ et $(\ln)'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse 1 est :

  $y = 1(x-1) + 0$ c'est-à-dire : $y = x - 1$. *Elle est parallèle à la droite d'équation* $y = x$.

- $\ln e = 1$ et $(\ln)'(e) = \dfrac{1}{e}$ donc l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse e est :

  $y = \dfrac{1}{e}(x - e) + 1$ c'est-à-dire : $y = \dfrac{1}{e}x$. *Elle est passe par l'origine O du repère.*

Exercice 5▶ ***position de $C_{\ln}$ par rapport à ses tangentes***

$C_{\ln}$ est la courbe représentative de la fonction $x \to \ln x$.

1 / M est un point quelconque de $C_{\ln}$ d'abscisse $m>0$.

a) Déterminer une équation de la tangente T_m à $C_{\ln}$ en M.

b) Prouver que la courbe $C_{\ln}$ est en-dessous de T_m .

2 / En déduire que pour tout nombre x strictement positif, $\ln x \leq x-1$

Solution

1 / a) Équation réduite de la tangente à $C_{\ln}$ en M d'abscisse m : $y=\frac{1}{m}(x-m)+\ln m$.

b) Étude du signe de la différence entre la fonction $x \mapsto \ln x$ et la fonction affine représentée par T_m :

Soit $d(x)=\ln x-\left[\frac{1}{m}(x-m)+\ln m\right]=\ln x-\frac{1}{m}x+1-\ln m$.

La fonction d est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et : $d'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{m}$.

Signe de $d'(x)$: $d'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{m}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x}\geq\frac{1}{m} \Leftrightarrow x\leq m$ (*la fonction inverse strictement décroissante sur* $]0\,;+\infty[$, *renverse l'ordre sur cet intervalle)*

Tableau de variations de d :

x	0		m		$+\infty$
$d'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
d	‖ $-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

conclusion :

On en déduit que pour tout $x>0$, $d(x)\leq 0$.

Donc la courbe $C_{\ln}$ se situe en-dessous de la tangente T_m

2 / En particulier pour $m=1$: $C_{\ln}$ est située en-dessous de la tangente T_1 dont l'équation réduite est : $y=x-1$.

Pour tout $x>0$, on a : $\ln x\leq x-1$.

Remarque : ***la courbe $C_{\ln}$ est située en-dessous de chacune de ses tangentes : on dit que la fonction $\ln$ est concave.***

3 / Autres limites importantes

Propriétés ▶ croissances comparées

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0^+$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0^-$ *(en langage usuel, on dit que " x l'emporte la fonction $\ln$ ")*

Démonstration

- On se rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, et donc par inverse de limites, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0^+$.

Posons $X=e^x$ (ce qui équivaut à $x=\ln X$) : qd $x\to+\infty$, on a aussi $X\to+\infty$.

On a de plus : $\frac{x}{e^x}=\frac{\ln X}{X}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0^+$

- Posons $y=\dfrac{1}{x}$. qd $x\to+\infty$, on a $y\to0^+$.

  On a de plus $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln\left(\dfrac{1}{y}\right)}{\dfrac{1}{y}}=y\times(-\ln y)=-y\ln y$.

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{y\to0^+}(-y\ln y)=0^+$,on en déduit que $\lim\limits_{y\to0^+}(y\ln y)=0^-$.

Remarque : on en déduit rapidement que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0^-$.

En effet, il suffit d'écrire : $\dfrac{\ln x}{x^n}=\dfrac{1}{x^{n-1}}\times\dfrac{\ln x}{x}$

Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{1}{x^{n-1}}\to0^+$ et $\dfrac{\ln x}{x}\to0^+$. Par produit des limites, $\dfrac{\ln x}{x^n}\to0^+$.

Même démarche en écrivant $x^n\ln x=x^{n-1}\times x\ln x$.

Propriétés

- $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

Démonstration ***(facile en reconnaissant un taux d'accroissement)***

- $\dfrac{\ln x}{x-1}=\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}$. On reconnait le taux d'accroissement de la fonction $\ln$ en 1.

  Or la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et en particulier en 1. Donc $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}=(\ln)'(1)=1$.

- Posons $X=1+x$; $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\dfrac{\ln X-\ln 1}{X-1}$. De plus quand $x\to0^+$, $X\to1^+$.

  On a alors : $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{X\to1^+}\dfrac{\ln X}{X-1}=1$ (d'après le résultat précédent).

Exercice 6

1 / Déterminer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son ensemble de définition et préciser les éventuelles asymptotes.

a) $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x+2}$ **b)** $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ **c)** $x\mapsto x\ln\left(\sqrt{x}\right)$.

2 / Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$ **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$.

Solution

1 / **a)** La fonction $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x+2}$ est définie sur $]0\,;+\infty[$.

- Quand $x \to 0^+$

$$\left.\begin{array}{l} \ln x \to -\infty \\ \dfrac{1}{x+2} \to \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \textit{par produit des limites} \quad \boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x+2} = -\infty}$$

- Quand $x \to +\infty$

on observe une forme indéterminée type " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

Levons cette indétermination.

$$\frac{\ln x}{x+2} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{x}{x+2} = \frac{\ln x}{x}\left(1 - \frac{2}{x+2}\right).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\ln x}{x} \to 0^+ \\ -\dfrac{2}{x+2} \to 0^- \ \textit{donc}\ 1 - \dfrac{2}{x+2} \to 1 \end{array}\right\} \textit{par produit des limites} \quad \boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x+2} = 0^+}$$

b) La fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est définie pour $\dfrac{x}{x+1} > 0$.

$\dfrac{x}{x+1}$ a le même signe que $x(x+1)$. D'où $\dfrac{x}{x+1} > 0$ ssi $x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]0\,;+\infty\right[$.

- Quand $x \to -\infty$ *on observe une forme indéterminée pour* $\dfrac{x}{x+1}$ *type* " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

On écrit alors $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$

$-\dfrac{1}{x+1} \to 0^+$ *donc* $1 - \dfrac{1}{x+1} \to 1$. On pose alors $X = \dfrac{x}{x+1}$. : $\boxed{\lim\limits_{x\to -\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = \lim\limits_{X\to 1^+}(\ln X) = 0}$.

- Quand $x \to -1^-$

$$\left.\begin{array}{l} x \to -1^- \\ x+1 \to 0^- \end{array}\right\} \frac{x}{x+1} \to +\infty.$$ On pose alors $X = \dfrac{x}{x+1}$: $\boxed{\lim\limits_{x\to -1^-}\left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = \lim\limits_{X\to +\infty}(\ln X) = +\infty}$.

f • Quand $x \to 0^+$: x et $x+1$ sont strictement positifs. On peut écrire : $\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \ln x - \ln(x+1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \ln x \to -\infty \\ \ln(x+1) \to \ln 1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{par difference de limites} \\ \ln x - \ln(x+1) \to -\infty \end{array}$$

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = -\infty}$.

- Quand $x \to +\infty$ *on observe une forme indéterminée pour* $\dfrac{x}{x+1}$ *type* " $\dfrac{\infty}{\infty}$ ".

On écrit alors $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \dfrac{1}{x+1}$.

$-\dfrac{1}{x+1} \to 0^-$ *donc* $1 - \dfrac{1}{x+1} \to 1^-$. On pose alors $X = \dfrac{x}{x+1}$. : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\right] = \lim\limits_{X\to 1^-}(\ln X) = 0^-}$.

c) La fonction $x \mapsto x\ln\left(\sqrt{x}\right)$ est définie pour tout $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. De plus $x\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{x\ln x}{2}$.

- Quand $x \to 0^+$, $x\ln x \to 0^-$. On en déduit que $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x\ln\left(\sqrt{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x\ln x}{2}\right) = 0^-}$.

- Quand $x \to +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} \to +\infty \\ \ln x \to +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{par produit des limites} \\ \dfrac{x\ln x}{2} \to +\infty \end{array}$$

Il en résulte que : $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty}\left[x\ln\left(\sqrt{x}\right)\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x\ln x}{2}\right) = +\infty}$.

2 / **a)** On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}$ *on observe une forme indéterminée type* $"\dfrac{\infty}{\infty}"$.

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)}=\frac{\ln\left[x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}{\ln\left[x\left(2+\frac{1}{x}\right)\right]}=\frac{\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x+\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}=\frac{\cancel{\ln x}\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]}{\cancel{\ln x}\left[1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right]}=\frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}{1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}.$$

- Quand $x\to+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}1+\frac{1}{x}\to1^+ \text{ donc } \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\to\ln1=0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ln x}\to0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par produit des limites}\\ \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\to0^+\end{array} \text{ d'ou } 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\to1\\[2ex] \left.\begin{array}{l}2+\frac{1}{x}\to2 \text{ donc } \ln\left(2+\frac{1}{x}\right)\to\ln2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ln x}\to0^+\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par produit des limites}\\ \frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\to0^+\end{array} \text{ d'ou } 1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\to1\end{array}\right\}$$

par quotient des limites

$$\boxed{\frac{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}{1+\frac{\ln\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}}\to1}$$

b) On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}$ *on observe une forme indéterminée type* $"\dfrac{\infty}{\infty}"$. On peut écrire $\dfrac{e^x}{\ln x}=\dfrac{e^x}{x}\times\dfrac{x}{\ln x}$

Quand $x\to+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{e^x}{x}\to+\infty \ (\text{croissances comparees})\\ \frac{\ln x}{x}\to0^+ \ (\text{croissances comparees}) \text{ donc } \frac{x}{\ln x}\to+\infty\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{par produit des limites}\\ \frac{e^x}{\ln x}\to+\infty\end{array}$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\ln x}=+\infty}$.

c) On cherche $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{2x}$ *on observe une forme indéterminée type* $"\dfrac{\infty}{\infty}"$.

$$\frac{\ln(1+x^2)}{2x}=\frac{\ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]}{2x}=\frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}=\frac{\ln(x^2)}{2x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}=\frac{2\ln x}{2x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2x}$$

Quand $x \to +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\ln x}{x} \to 0^+ \ (\textit{croissances comparees}) \\ \left.\begin{array}{l} 1+\dfrac{1}{x^2} \to 1^+ \ \textit{donc} \ \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \to 0^+ \\ \dfrac{1}{2x} \to 0^+ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{par produit des limites} \\ \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}{2x} \to 0^+ \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \textit{par somme des limites} \\ \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x} \to 0^+ \end{array}$$

D'où $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{2x} = 0^+}$

4 / Dérivée de $x \mapsto \ln\left[u(x)\right]$

Propriété

Soit u une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $\ln(u)$ (ou encore $\ln \circ u$) est dérivable sur I et sa dérivée est :

$$\left[\ln(u)\right]' = \frac{u'}{u}$$

Remarque : *on se rappelle que* $\ln(u)$, *c'est* $\ln \circ u$; *le résultat découle immédiatement du théorème de dérivation des fonctions composées.*

Exercice 7

▶ Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a / $f_1(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$, $x \in \left]0;+\infty\right[$

b / $f_2(x) = (x+1)\ln(2-x)$; $x \in \left]-\infty;2\right[$

c / $f_3(x) = \ln\left(1+e^{-x}\right)$; $x \in \mathbb{R}$

d / $f_4(x) = \ln(\cos x)$; $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

Solution

a / $f_1'(x) = \dfrac{\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'}{\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)} = \dfrac{x^2+1}{x} \times \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)'$

Or : $\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)' = \dfrac{x^2+1-x\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$

On obtient alors : $\boxed{f_1'(x) = \dfrac{1-x^2}{x\left(x^2+1\right)}}$.

b / $f_2 = u \times v$ avec :

$$\left.\begin{array}{ll} u(x) = x+1 & v(x) = \ln(2-x) \\ u'(x) = 1 & v'(x) = \dfrac{(2-x)'}{(2-x)} = \dfrac{-1}{2-x} = \dfrac{1}{x-2} \end{array}\right\} \ \textit{on a alors} \ \boxed{f_2'(x) = \ln(2-x) + \frac{x+1}{x-2}}$$

c / $f_3'(x)=\dfrac{\left(1+e^{-x}\right)'}{\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{-e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)}=\dfrac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{1}{e^x}\times\dfrac{1}{\frac{e^x+1}{e^x}}=\dfrac{1}{e^x}\times\dfrac{e^x}{e^x+1}=\boxed{\dfrac{1}{e^x+1}}$

d / $f_4'(x)=\dfrac{(\cos)'(x)}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=\boxed{-\tan x}$

IV. Logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarques

- $\ln 10>0$ donc la fonction $\log$, a le même sens de variation que la fonction $\ln$, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction $\log$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction $\log$ possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction $\ln$.
- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\log\left(10^x\right)=x$; pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\log(10)^n=n$.