Nombres complexes (partie 2) : les bases

Question 1

1) Calculer le module de chacun des nombres complexes : $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 5 - 5i$; $z_3 = 3i$; $z_4 = -4$
2) Soit z un nombre complexe de module 3. Que vaut $z\bar{z}$?
3) Soient A et B d'affixes respectives $2 - 3i$ et $-4 + 3i$. Calculer les distances OA et OB.

Question 2

1) Parmi les écritures proposées ci-dessous, dire lesquelles sont des formes trigonométriques :
   $z_1 = \sqrt{3}\left(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = -3\left(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_3 = 2\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; $z_4 = 9(cos0 + isin0)$
2) Écrire sous forme trigonométrique les complexes ci-dessous :
   $z_1 = 1 - i$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$; $z_3 = -6 - 2i\sqrt{3}$; $z_4 = i\sqrt{2}$; $z_6 = -\frac{4}{3}$; $z_7 = -5i$; $z_8 = 2$
3) Soit z_1 le complexe de module 2 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ et z_2 le complexe de module 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.
   a/ Déterminer $|z_1z_2|$; $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$; $|z_1^5|$ b/ Déterminer $arg(z_1z_2)$; $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$; $arg(z_1^5)$

Question 3

1) Écrire sous forme trigonométrique les complexes : $z_1 = e^{i\pi}$; $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$; $z_3 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $z_4 = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
2) Écrire les nombres complexes suivants en utilisant la notation exponentielle :
   $$z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{-i\frac{\pi}{6}} \ ; \ z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{2\pi}{3}} \ ; \ z_3 = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3$$
3) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants : $3e^{i\frac{\pi}{4}}$; $\frac{1}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$; $2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

Question 4

On donne les nombres complexes suivants : $z_1 = (\sqrt{3} - i)(-1 - i)$; $z_2 = i\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$; $z_3 = \left(\frac{3i}{1+i\sqrt{3}}\right)^2$

1) Trouver deux méthodes différentes qui permettent de déterminer le module et un argument de ces complexes.
2) Utiliser l'une de ces deux méthodes pour trouver module et argument de ces nombres complexes.

Question 5

On considère les nombres complexes : $z = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z' = 1 - i$.

1) Déterminer le module et un argument de z ; z' et $\frac{z}{z'}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$.
3) En déduire que : $cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Question 6 (d'après bac)

➥ VRAI ou FAUX ? Justifier.

Proposition 1 : pour tout nombre complexe n, $(1 + i)^{4n} = (-4)^n$.

Proposition 2 : pour tout nombre réel α : $1 + e^{2i\alpha} = 2e^{i\alpha}cos(\alpha)$

AMBITION-MATHS