Fiche d'exercices n°5

Exercice 1

L'objectif est de résoudre dans $\mathbb{Z}$: $n^2-2n+3 \equiv 0[4]$.

Cet exercice propose de mettre en évidence une méthode rapide de la recherche des solutions.

1) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de n par 4 ?

2) Compléter le tableau des congruences suivants :

Restes de la division euclidienne de n par 4					
n est congru à ... modulo 4					
n^2 est congru à ... modulo 4					
$-2n$ est congru à ... modulo 4					
n^2-2n est congru à ... modulo 4					
n^2-2n+3 est congru à ... modulo 4					

3) Conclure.

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1➤ Résoudre les équations suivantes : $3x \equiv 7[9]$; $4x \equiv 2[5]$; $2x \equiv 6[8]$.

2➤ a/ Justifier que $8n^2-9n+19 \equiv 0[6] \Leftrightarrow 2n^2+3n+1 \equiv 0[6]$

b/ Résoudre $8n^2-9n+19 \equiv 0[6]$.

Exercice 3

Partie 1

1) Déterminer le reste de $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ dans la division euclidienne par 7.

2) En déduire une formule générale donnant le reste de $2^{3k}, 2^{3k+1}, 2^{3k+2}$ dans la division euclidienne par 7.

3) En déduire le reste de 2^{55} dans la division euclidienne par 7.

Partie 2

➤ En s'inspirant de la partie 1, donner le reste de 5^n dans la division euclidienne par 12, puis en déduire le reste de 5^{789} par 12.

Exercice 4

prérequis : Cours sur la numération(site ambition-maths.com) . Eh oui, il faut bosser un peu le cours pour découvrir de nouvelles notations et méthodes de calculs. Bienvenue donc dans le nouveau monde du chiffre…

Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10, ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels ceux qui sont divisibles par 7.

1) Vérifier que $10^3 \equiv -1[7]$.

2) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 5

On note $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B$ les chiffres de l'écriture d'un nombre en base 12.
$\overline{BA7}^{12} = B \times 12^2 + A \times 12^1 + 7 \times 12^0 = 11 \times 12^2 + 10 \times 12^1 + 7 \times 12^0 = 1\,711$ en base 10.

1) a/ Soit N_1 le nombre s'écrivant en base 12 : $N_1 = \overline{B1A}^{12}$.
Déterminer l'écriture de N_1 en base 10.
b/ Soit N_2 le nombre s'écrivant en base 10 : $N_2 = 1131 = 1 \times 10^3 + 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 1 \times 10^0$.
Déterminer l'écriture de N_2 en base 12.

Dans la suite, un entier naturel N s'écrira de manière générale en base 12 : $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{12}$

2) a/ Démontrer que $N \equiv a_0[3]$. En déduire un critère de divisibilité par 3 d'un nombre écrit en base 12.
b/ À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_2 est divisible par 3. Confirmer avec son écriture en base 10.

3) a/ Démontrer que $N \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0[11]$. En déduire un critère de divisibilité par 11 d'un nombre écrit en base 12.
b/ À l'aide de son écriture en base 12, déterminer si N_1 est divisible par 11. Confirmer avec son écriture en base 10.

4) Un nombre N s'écrit $\overline{x4y}^{12}$. Déterminer les valeurs de x et de y pour lesquelles N est divisible par 33.