Terminale S

Ch.10

Fonction exponentielle
→FICHE 1

Exercice 1

Soit a est un réel strictement positif, $\ln(a)$ désigne l'unique réel dont l'exponentielle vaut a.

On a : $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln(a)$ *ou encore* $e^{\ln(a)} = a$.

1 ▸ Dans chaque cas, étudier le signe de l'expression proposée.

a) $A(x)=e^x-5$ **b)** $B(x)=e^x-e$ **c)** $C(x)=1-e^{-x}$

d) $D(x)=e^{2x}-e^x$ **e)** $E(x)=e^{2x}-e^x-2$ **f)** $F(x)=e^{x+2}-e^{2-x}$

2 ▸ Soit $f(x)=xe^{-x}+2(1-e^{-x})$. Démontrer que $f(x)>0$ sur $]0;+\infty[$ et $f(x)<0$ sur $]-\infty;0[$.

Exercice 2

1 ▸ Déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de :

- xe^{-x+2}
- $(3-x)e^x$
- $e^{2x}-e^x-1$

2 ▸ Déterminer les limites en 0, $+\infty$ et $-\infty$ de :

- $x-\dfrac{2e^x}{e^x-1}$
- $e^{\frac{1}{x}}$
- $\dfrac{1}{x}(e^{2x}-1)$

Exercice 3

1) **a)** Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction proposée.

- $f(x)=xe^{\frac{1}{x}}$
- $g(x)=2(x-1)e^{x-1}$
- $h(x)=\cos x.e^{\sin x}$
- $u(x)=e^{\frac{x-1}{x+1}}$.

b) Dresser les tableaux de variations des fonctions f, g et u.

2) Soit la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=xe^{\sqrt{x}}$.

a) Pourquoi peut-on affirmer que la fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$?

b) Calculer alors $f'(x)$ pour $x>0$.

c) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

3) Soit la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ si $x>0$ et $g(0)=0$.

a) Pourquoi peut-on affirmer que la fonction g est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$?

b) Démontrer que g est continue en 0.

c) Démontrer que g est dérivable en 0 et calculer $g'(0)$.

Exercice 4

1 ▸ Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{1+e^{4x}}{1+e^{2x}}=\dfrac{e^{-x}+e^{3x}}{e^{-x}+e^x}$.

2 ▸ Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- $3e^{x+1}+5=2$
- $\dfrac{e^{x^2}}{e^{x+2}}-1\geq 0$
- $e^{2x}-3e^x-4=0$

Exercice 5

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1} & si\ x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

Partie A ▸ continuité et limites

❶ Démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$.

❷ En déduire que la fonction f est continue en 0.

❸ Déterminer la limite de f en $-\infty$ et interpréter ce résultat en terme d'asymptote.

❹ Montrer que pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{x}{1-e^{-x}}$ puis que la droite d'équation $y=x$ est asymptote à C en $+\infty$

Partie B ▸ variations

❶ Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x\geq x+1$ et que l'égalité n'a lieu que pour $x=0$.

❷ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{0\}$ et que pour $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f'(x)=\dfrac{e^x\left(e^x-(x+1)\right)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

❸ Dresser le tableau de variations complet de f.

❹ Montrer que l'équation $f(x)=e$ admet une unique solution α dont on donnera une valeur approchée au centième.

Partie C ▸ une famille de droites

Soit x un réel non nul et la droite $D_x=(MM')$ où $M\left(x;f(x)\right)$ et $M'\left(-x;f(-x)\right)$.

❶ Établir que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$. En déduire la valeur de $\dfrac{f(x)-f(-x)}{2x}$.

❷ Montrer que lorsque $x\neq 0$, les droites D_x sont parallèles.