

Terminale S

Ch.4

SUITES PARTIE 2

► limites de suites

I. Limite finie, infinie

1 / Limite finie d'une suite

Définition et propriété

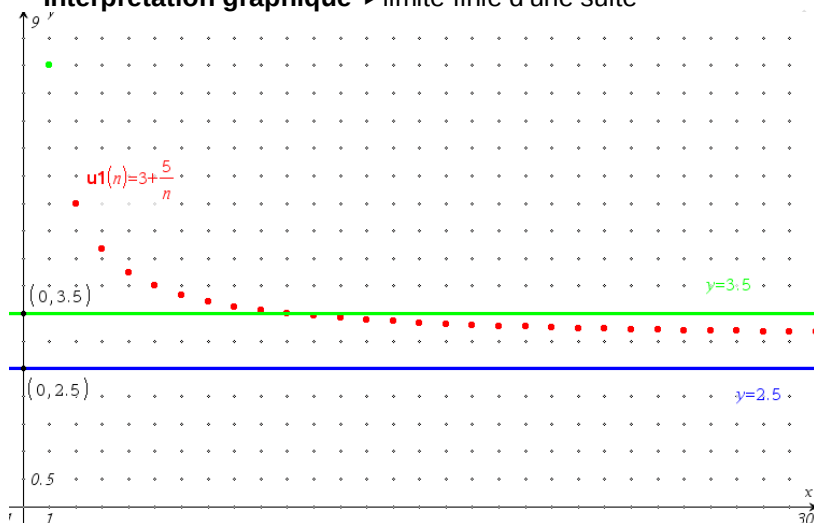
- La suite (u_n) admet pour limite le réel l si, tout intervalle ouvert I contenant l , contient aussi les valeurs u_n à partir d'un certain rang N , c'est-à-dire : pour tout entier $n \geq N$, $u_n \in I$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

On dit aussi que u_n tend vers l quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite (u_n) converge vers l .

- La limite l , quand elle existe, est unique.

Interprétation graphique ► limite finie d'une suite



On peut restreindre l'intervalle I à tout intervalle de la forme $]l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$.

Démonstration (par l'absurde) ► unicité de la limite

(NON ÉXIGÉE)

Supposons que (u_n) admette deux limites l et l' avec $l < l'$.

$$\left[l - 1; \frac{l + l'}{2} \right[\text{ contient tous les termes } u_n \text{ à partir d'un certain rang } n_0.$$

$$\left[\frac{l + l'}{2}; l' + 1 \right[\text{ contient tous les termes } u_n \text{ à partir d'un certain rang } n_1.$$

Pour n plus grand que n_0 et n_1 , u_n appartiendrait à la fois aux deux intervalles qui sont disjoints. C'est impossible donc (u_n) ne peut pas admettre deux limites finies distinctes.

Remarques

- Concrètement, à partir d'un certain rang, les termes u_n s'accumulent autour de l .
- Dans le plan, tous les points de coordonnées $(n; u_n)$ sont situés entre les droites d'équation $y = m$ et $y = M$.

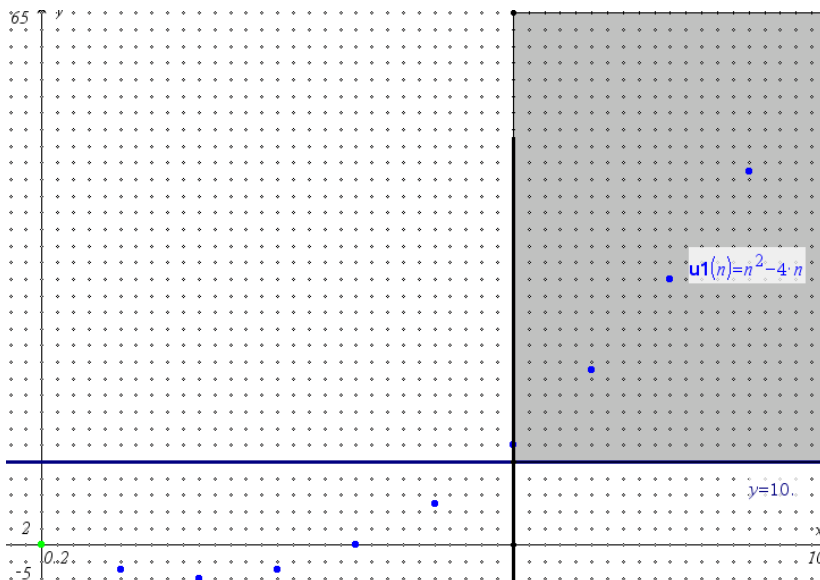
2 / Limite infinie d'une suite

Définition

On dit que u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ ou que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N , c'est-à-dire : pour tout entier $n \geq N$, $u_n > A$.

On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Interprétation graphique ► limite infinie d'une suite



(Ici, $N = 5$ et $A = 10$)

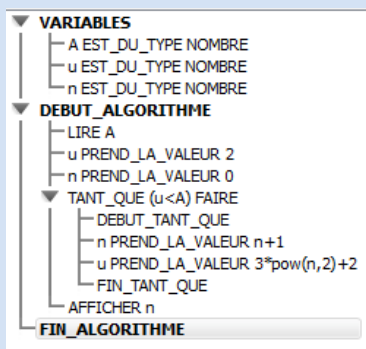
Remarques

- De la même façon, on dit que (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang N , c'est-à-dire : pour tout entier $n \geq N$, $u_n < A$. On note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- Concrètement, à partir d'un certain rang, les termes de la suite finissent par dépasser n'importe quel nombre réel A .
- Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs (-1) et 1 . Elle n'admet pas de limite. On dit également qu'elle diverge.

Exercice 1 ► algorithmique

Algorithme de détermination d'un seuil à partir duquel $u_n \geq A$ dans le cas d'une suite croissante de limite infinie.

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 3n^2 + 2$ pour tout entier n . On peut démontrer que (u_n) est croissante et que sa limite est $+\infty$



Observation : La boucle Tant que permet de répéter le calcul des termes jusqu'à en trouver un supérieur à A . La boucle s'arrête alors et c'est l'indice de ce terme qui est affiché, c'est-à-dire le seuil recherché.

II. Opérations sur les limites de suites

1 / Limites des suites usuelles

Théorèmes

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

Pour tout entier $k \geq 1$:

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$$

$$\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Démonstration $\triangleright \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$

Soit A un réel quelconque.

- Si $A \leq 0$, alors, pour tout entier $n \geq 1$, $n^2 > A$. On pose alors $N = 1$.
- Sinon, $A > 0$. Alors pour tout entier $n > \sqrt{A}$, on a $n^2 > A$, car la fonction carré est strictement croissante sur $] \sqrt{A}; +\infty[$. Soit N le plus petit entier tel que $N > \sqrt{A}$, alors :

Pour tout entier $n \geq N$, on a $n^2 > A$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

2 / Opérations sur les limites

On considère deux suites (u_n) et (v_n) . On veut déterminer les limites à l'infini de $u_n + v_n$, $u_n \times v_n$ et $\frac{u_n}{v_n}$ connaissant les limites de u_n et v_n . On dispose de théorèmes généraux mais dans la plupart des cas, les résultats sont intuitifs. Quelques fois, on ne peut pas prévoir immédiatement la limite éventuelle. On parle alors de **forme indéterminée**.

l et l' sont des réels. Une forme indéterminée est notée **F.I.**

► Limite d'une somme de suites

données	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
concl.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \dots$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

► Limite du produit de suites

données	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
concl.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n) = \dots$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

► Limite d'un quotient de suites

données	$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$	l	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \dots$	$l' \neq 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$	0
concl.	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \right) = \dots$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	F.I.

Remarques

- Il y a quatre cas d'indétermination qui sont, en utilisant un abus d'écriture :

$$" \infty - \infty ", " 0 \times \infty ", " \frac{\infty}{\infty } ", " \frac{0}{0 } ".$$

Pour lever une indétermination, on utilise souvent le calcul algébrique (développement, factorisation...).

- L'utilisation de la calculatrice permet de confirmer les limites en tabulant (du mot tableur) les suites pour des rangs très grands.

ex : on veut retrouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3n+5} \right) = 0$ à l'aide de la calculatrice :

X	Y1
50000	1,33329E-05
55000	1,21208E-05
60000	1,11108E-05
65000	1,02561E-05
70000	9,52358E-06
75000	8,88869E-06
80000	8,33316E-06
	Y1=2/(3X+5)

Exercice 2 ► utiliser les opérations sur les limites

Déterminer les limites des suites définies par :

a / $u_n = n^2 + 4n + 1$

b / $v_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) (-n + 3)$

c / $r_n = u_n v_n$

d / $t_n = \frac{1}{u_n}$

Solution

a / On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4n + 1) = +\infty$.

On en déduit que (en utilisant la limite d'une somme) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

b / On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1$

D'autre part : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n) = -\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n + 3) = -\infty$.

On en déduit que (en utilisant la limite d'un produit) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

c / On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$. On en déduit que (limite d'un produit) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = -\infty$.

d / On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. On en déduit que (limite d'un quotient) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$

Exercice 3 ► lever une indétermination dans un calcul de limites

Déterminer les limites des suites définies par :

a / $u_n = 2\sqrt{n} - n$

b / $v_n = \frac{n^2 + 3n}{3n^2 + 4}$

c / $w_n = \frac{n+3}{n^2-2}$

d / $p_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(n+2)$

Solutiona / On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} -n = -\infty$. Il s'agit donc d'une forme indéterminée (" $\infty - \infty$ ").

En factorisant par n , on obtient : $u_n = n \left(\frac{2\sqrt{n}}{n} - 1 \right) = n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 \right)$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} - 1 \right) = -1$. On en déduit par limite d'un produit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

b / On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + 3n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n^2 + 4) = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

En factorisant le numérateur et le dénominateur par n^2 , on obtient : $v_n = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{1 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1 + \frac{3}{n}}{3 + \frac{4}{n^2}}$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right) = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{4}{n^2} \right) = 3$. On en déduit par limite d'un quotient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

c / On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+3) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 2) = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

En factorisant le numérateur et le dénominateur par n^2 , on obtient : $v_n = \frac{n^2}{n^2} \times \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 - \frac{2}{n^2}}$.

Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) = 1$. On en déduit par limite d'un quotient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

d / On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) = +\infty$. Il s'agit donc d'une forme indéterminée (" $0 \times \infty$ ").

En développant, on obtient : $t_n = \frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

On a alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$. On en déduit par limite d'une somme que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$.

III. Propriétés sur les limites de suites**1 / Limites et comparaison****Définition et propriété**Soient deux suites (u_n) et (v_n) et un entier naturel N tels que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \leq v_n$.• **Théorème de minoration** : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.• **Théorème de majoration** : si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration**(ÉXIGÉE)**

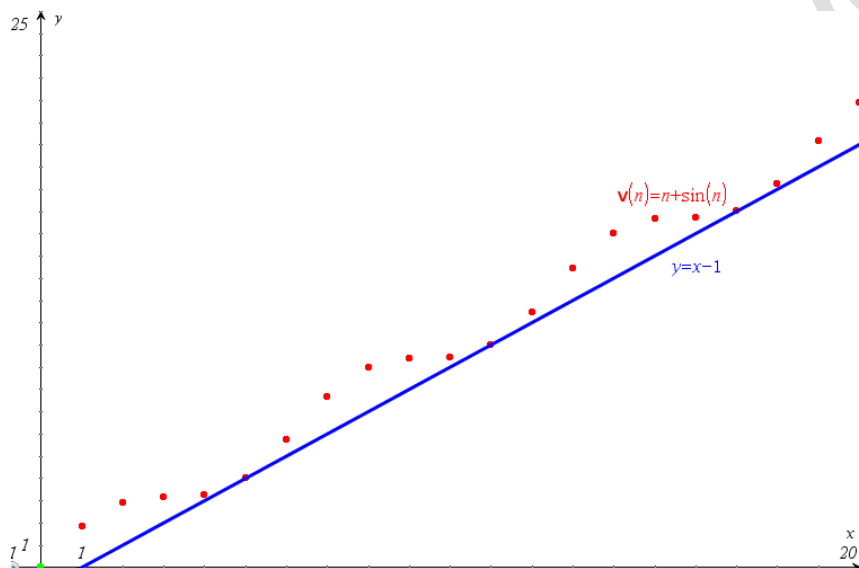
- Soit $A \in \mathbb{R}$ (ce nombre est fixé arbitrairement). Par définition de limite infinie, il s'agit de démontrer que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs v_n à partir d'un certain rang p .
- Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors il existe un rang p_1 à partir duquel tous les termes u_n appartiennent à l'intervalle $]A; +\infty[$.
- On sait de plus qu'à partir d'un certain rang N , on a $u_n \leq v_n$.
Posons $p = \max(p_1; N)$, alors pour tout $n \geq p$, on a $\begin{cases} u_n \in]A; +\infty[\\ v_n \geq u_n \end{cases}$, ainsi $v_n \in]A; +\infty[$.
- Finalement " tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs v_n à partir d'un certain rang p "
Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- La démonstration du théorème de majoration est analogue. **(voir fiche exercice)**

Exemple

Soit les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n-1$ et $v_n = n + \sin(n)$.

Pour tout entier n , $\sin(n) \geq -1$ donc $v_n \geq u_n$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

Graphiquement, les points de coordonnées $(n; v_n)$ sont au-dessus de la droite d'équation $y = x - 1$

**Théorème "des gendarmes" ou théorème d'encadrement (admis)**

Soit $l \in \mathbb{R}$. et (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant les conditions :

- à partir d'un certain rang N , on a $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$;

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l.$$

Autrement dit, si les suites (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l alors la suite (v_n) converge aussi vers l .

Exercice 4 ► déterminer une limite par comparaison

Déterminer le limite des suites (u_n) et (v_n) dont on donne les termes généraux ci-dessous :

$$a / u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n+5}$$

$$b / v_n = \frac{n + \cos(n)}{n+3}$$

Solution

a / Pour tout entier n , on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$. Donc $n^2 - 1 \leq n^2 + (-1)^n \leq n^2 + 1$.

En divisant par $n+5$ (strictement positif), on obtient : $\frac{n^2 - 1}{n+5} \leq u_n \leq \frac{n^2 + 1}{n+5}$.

Cherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n+5} \right)$:

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 1) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+5) = +\infty$. C'est donc une forme indéterminée (" $\frac{\infty}{\infty}$ ").

$$\text{Or } \frac{n^2 - 1}{n+5} = \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}} ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}\right) = 0. \text{ D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{n+5}\right) = +\infty.$$

D'après le théorème de minoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

b / Pour tout entier n , on a : $-1 \leq \cos(n) \leq 1$. Donc $n-1 \leq n + \cos(n) \leq n+1$ et $\frac{n-1}{n+3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{n+3}$.

Cherchons $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right)$ et levons cette indétermination : $\frac{n-1}{n+3} = \frac{n \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-1}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \right) = 1.$$

$$\text{Cherchons } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right) : \frac{n+1}{n+3} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+3} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}} \right) = 1.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$. La suite (v_n) converge vers 1.

Point méthode → déterminer une limite par comparaison

1 ► on utilise des encadrements classiques. Par exemple pour tout entier n :

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \quad \text{ou bien} \quad -1 \leq \cos(n) \leq 1 \quad \text{ou encore} \quad -1 \leq \sin(n) \leq 1;$$

2 ► on encadre, (ou on majore, ou on minore), la suite par des suites dont on sait déterminer la limite ;

3 ► on conclut en utilisant l'un des théorèmes :

- de majoration ou bien
- de minoration ou encore
- des gendarmes.

ATTENTION : on rencontre souvent dans les copies l'erreur suivante :

pour tout $n : u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ C'EST FAUX !

contre-exemple : $-n^2 \leq \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Or : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^2) = -\infty$.

En revanche, (fréquent dans les exercices type BAC) : si l'on sait de plus que tous les termes de la suite sont positifs alors on obtient :

pour tout $n : 0 \leq u_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ "0" symbolisant ici le terme général de la suite constante nulle

Donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Théorème "des gendarmes" avec valeur absolue

Si à partir d'un certain rang N , on a $|u_n - l| \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Démonstration

Pour tout $n \geq N$, $|u_n - l| \leq v_n$ c'est-à-dire : $-v_n \leq u_n - l \leq v_n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-v_n) = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

2 / Cas des suites convergentes et monotones

Théorème (admis)

- toute suite croissante et majorée est convergente (admet une limite finie);
- toute suite décroissante et minorée est convergente

Remarques

- Attention : ce théorème ne donne pas la valeur de la limite de la suite mais seulement l'existence de cette limite finie et d'un majorant (ou minorant) de cette suite.
- Conséquence du théorème : une suite croissante peut être :
 - majorée et donc convergente;
 - non majorée et donc divergente vers $+\infty$. (voir fiche exercice)

Exercice 5 ► utiliser le théorème de convergence monotone

Soit (u_n) une suite décroissante et strictement positive.

Montrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{1+u_n}$ est convergente.

Solution

Étudions le sens de variation de la suite (v_n) : la suite (u_n) étant strictement positive, la suite (v_n) l'est aussi.

Comparons alors $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1 en étudiant le signe de $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{\frac{1}{1+u_{n+1}}}{\frac{1}{1+u_n}} - 1 = \frac{1+u_n}{1+u_{n+1}} - 1 = \frac{1+u_n - 1 - u_{n+1}}{1+u_{n+1}} = \frac{u_n - u_{n+1}}{1+u_{n+1}}.$$

Or la suite (u_n) étant décroissante, on a $u_n - u_{n+1} \geq 0$;

et la suite (u_n) étant strictement positive alors $1+u_{n+1} > 0$. On en déduit que $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \geq 0$ soit $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1$.

La suite (v_n) est donc croissante. **(1)**

Comme $u_n > 0$ alors $1+u_n > 1$ et $\frac{1}{1+u_n} < 1$; la suite (v_n) est donc majorée par 1. **(2)**

D'après **(1)** et **(2)**, la suite (v_n) converge.

IV. Suites arithmétiques et géométriques

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r non nulle.

- si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, la suite est divergente vers $+\infty$;
- si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, la suite est divergente vers $-\infty$.

Démonstration ► cas $r > 0$

(NON ÉXIGÉE)

On sait que (u_n) est définie par : $u_n = u_0 + nr$.

Quand n tend vers $+\infty$, $u_n = u_0 + nr$ tend vers $+\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.(application des opérations sur les limites).

Théorème

Soit q un réel non nul.

- si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$, la suite (q^n) est convergente vers 0 ;
- si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$, la suite (q^n) est convergente vers 1 ; (q^n est constante) ;
- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$, la suite (q^n) est divergente vers $+\infty$;
- si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Démonstration

(ÉXIGÉE)

Soit un réel q .

- On suppose que $-1 < q < 1$.

► Dans le cas où $q = 0$, on a de façon évidente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

► Dans le cas où $0 < q < 1$, alors $\frac{1}{q} > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$ soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$.

En passant à l'inverse, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

► Dans le cas où $-1 < q < 0$, alors pour tout entier n , $-|q^n| \leq q^n \leq |q^n|$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} -|q^n| = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

- On suppose que $q > 1$.

On pose alors $q = 1 + a$ avec $a > 0$. On a donc $q^n = (1 + a)^n$.

On sait d'après l'inégalité de BERNOULLI que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: pour tout $a > 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Donc à partir du rang 0, $1 + na \leq (1 + a)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + a)^n = +\infty$$

- On suppose que $q \leq -1$. les valeurs q^n prennent alternativement des valeurs dans les intervalles $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$ selon la parité de n . Alors la suite (q^n) n'a pas de limite.

Exemple

Étudier le comportement à l'infini des suites définies pour tout entier n par : $u_n = \frac{2}{3^n}$ et $x_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$.

- La suite (u_n) est géométrique : $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 0$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

- x_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{Ainsi, } x_n = 2 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = 2 \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = 3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Or : comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]\right] = 3$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 3$.