Terminale S

Ch.3

Probabilités conditionnelles

Dans tout ce chapitre, on appelle Ω **l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire** (autrement appelé **univers**).

Exemple d'introduction

Le proviseur d'un lycée fait le point sur la réussite au bac des élèves de son établissement en distinguant les élèves redoublants des élèves non redoublants.
Sur 468 élèves de terminale, 414 ont obtenu leur bac. Il est à noter que, parmi les 40 redoublants, on déplore 4 échecs

1) Compléter le tableau ci-dessous.

	Nombre de succès au bac	Nombre d'échecs au bac	Total
Nombre de redoublants			
Nombre de non redoublants			
Total			468

On choisit au hasard le dossier d'un élève de terminale du lycée.
On considère les événements : B : "l'élève choisi a obtenu son bac " R : " l'élève choisi est redoublant ".

2) Calculer les probabilités $p(B)$, $p(R)$, $p(\overline{R})$, $p(B\cap R)$ et $p(B\cap\overline{R})$ et préciser à chaque fois à quoi correspondent ces probabilités.

3) a) Sachant que l'on a choisi le dossier d'un élève redoublant, quelle la probabilité qu'il soit bachelier?
On note $p_R(B)$ cette probabilité appelée probabilité conditionnelle de B sachant R

b) Calculer $\dfrac{p(B\cap R)}{p(R)}$. Que constate-t-on ?

4) Comparer la réussite au bac des élèves redoublants et des élèves non redoublants.

5) Que représentent les quotients $\dfrac{36}{414}$ et $\dfrac{378}{414}$?

I. Conditionnement par un événement de probabilité non nulle

1 / Probabilité conditionnelle de B sachant A

définition

Soit A et B deux événements de l'ensemble Ω, A étant de probabilité non nulle ($p(A)\neq 0$).
La **probabilité conditionnelle de B sachant A** (probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que l'événement A est réalisé) est le nombre $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

$p_A(B)$ se lit "*probabilité de* B *sachant* A "

Remarques

- $p_A(B)$ se note aussi $p(B/A)$.
- Cette application qui, à tout événement B de Ω fait correspondre le réel $p_A(B)$, définit une probabilité sur Ω et vérifie toutes les propriétés d'une probabilité.

Exemple
On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6.

Si A est l'événement " le résultat est pair ", on a : $p_A(\{2\})=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$ et $p_A(\{5\})=0$.

propriété
Soit A et B deux événements tels que $p(A)\neq 0$. Alors :

❶ $0\leq p_A(B)\leq 1$; ❷ $p_A(A)=1$; ❸ $p_A(\overline{B})=1-p_A(B)$; ❹ si A et B sont incompatibles, $p_A(B)=0$

Dans une situation d'équiprobabilité, : $p_A(B)=\dfrac{nombre\ d'elements\ de\ B\cap A}{nombre\ d'elements\ de\ A}$

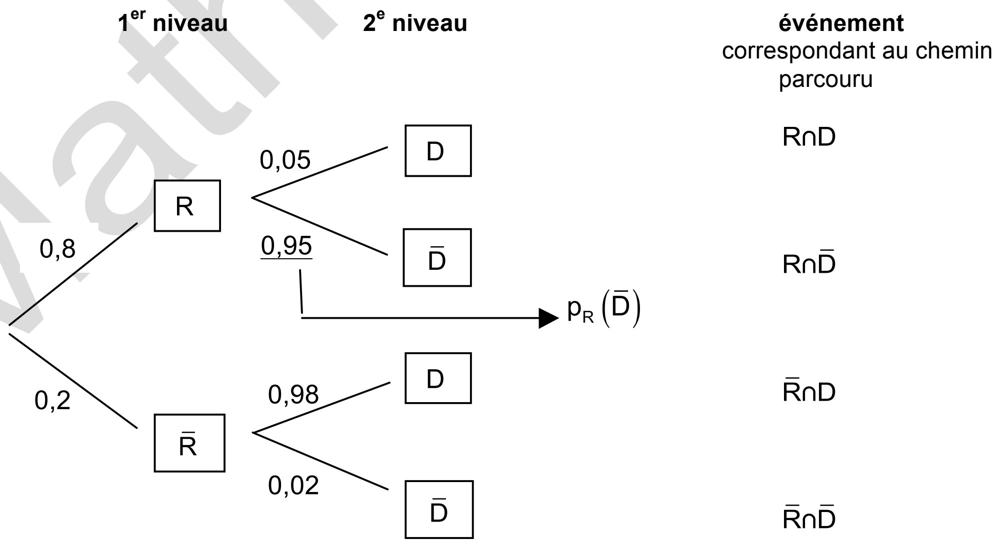
Remarque
❸ et ❹ : si l'on sait que A est réalisé, alors A est devenu certain et si B est incompatible avec A alors B est impossible.
Les autres démonstrations sont immédiates en utilisant la définition de p_A

2 / Représentation par un arbre pondéré : exemple

Introduction
Tous les élèves de terminale du lycée ont passé un test de certification en anglais.
❶ 80% ont réussi le test.
❷ Parmi ceux qui ont réussi le test, 95% n'ont jamais redoublé.
❸ Parmi ceux qui ont échoué au test, 2% n'ont jamais redoublé.

On considère les événements R : " l'élève a réussi le test " et D : " l'élève a déjà redoublé "

➔ Représenter l'expérience décrite à l'aide d'un arbre pondéré



Règles à respecter

Règle 1 : sur les branches du 1er niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.

Règle 2 : sur les branches du 2ème niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

Règle 3 : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud, est égale à 1.

Règle 4 : la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches composant ce chemin.
exemple : $p(R\cap\overline{D})=p(R)\times p_R(\overline{D})=0{,}8\times 0{,}95$

Règle 5 : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

Remarques

- Sur chacun des niveaux, on peut avoir plus de deux branches.
- La somme des probabilités obtenues en bout de chacun des chemins, est, elle aussi, égale à 1.

Exercice 1 ▶ type BAC

On pourra pour cet exercice modéliser le jeu par un arbre pondéré.

On dispose de deux dés cubiques bien équilibrés : le dé A possède une face verte, deux faces noires et trois faces rouges. Le dé B possède quatre faces vertes et deux faces noires.

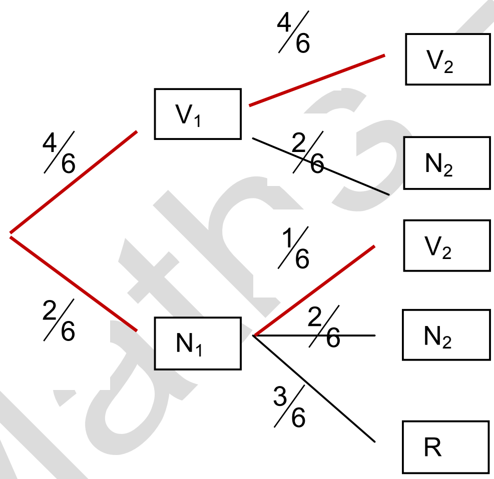
Un jeu se déroule de la manière suivante :on lance le dé B.
- Si la face obtenue est verte, on lance à nouveau le dé B et on note la couleur de la face obtenue ;
- Si la face obtenue est noire, on lance le dé A et on note la couleur de la face obtenue.

1 / Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer sachant que l'on a obtenu une face verte au premier lancer ?

2 / Montrer que la probabilité d'obtenir deux faces vertes est égale à $\frac{4}{9}$.

3 / Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Solution



1 / Sachant que l'on a obtenu une face verte au 1er lancer, on lance le dé B qui possède 4 faces vertes.
Ainsi la probabilité d'obtenir une face verte au 2nd lancer sachant que l'on a obtenu une face verte au 1er lancer est : $p_{V_1}(V_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2 / $p(V_1 \cap V_2)=p(V_1)\times p_{V_1}(V_2)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

3 / En suivant les chemins rouges de l'arbre, on a :
$p(V_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{4}{9}+\frac{1}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}$

2 / Représentation à l'aide d'un tableau

Exercice 2

On donne la répartition des garçons et des filles dans les classes de TS du lycée X suivant leur spécialité :

	Maths	Physique	SVT	
Filles	45	55	70	
Garçons	78	125	45	

On choisit au hasard un élève.

❶ Calculer la probabilité que cet élève soit une fille.
❷ Calculer la probabilité que cet élève soit une fille, sachant que l'élève est en SVT.
❸ Calculer la probabilité que cet élève soit en SVT sachant que c'est une fille.

II. Formule des probabilités totales

1 / Cas simple

propriété

❶ A et B sont deux événements . On a : $p(B)=p(B\cap A)+p\left(B\cap \bar{A}\right)$.

❷ **conséquence** : $p(B)=p_A(B)\times p(A)+p_{\bar{A}}(B)\times p\left(\bar{A}\right)$

démonstration du ❶

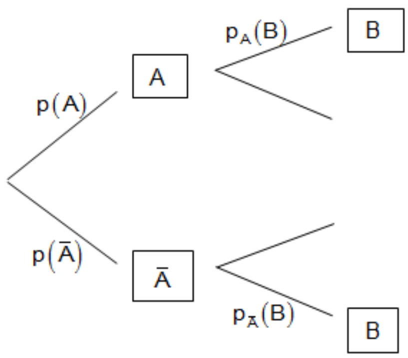
$B=(B\cap A)\cup\left(B\cap \bar{A}\right)$. De plus $B\cap A$ et $B\cap \bar{A}$ sont deux événements incompatibles donc $p\left((B\cap A)\cap\left(B\cap \bar{A}\right)\right)=0$.

D'où : $p(B)=p\left((B\cap A)\cup\left(B\cap \bar{A}\right)\right)=p(B\cap A)+p\left(B\cap \bar{A}\right)-\underbrace{p\left((B\cap A)\cap\left(B\cap \bar{A}\right)\right)}_{=0}=p(B\cap A)+p\left(B\cap \bar{A}\right)$.

Visualisation à l'aide d'un arbre pondéré

- les probabilités de $B\cap A$ et $B\cap \bar{A}$ sont les produits des probabilités rencontrées le long des chemins menant à B

- la probabilité de B est la somme de ces probabilités



Exercice 3

Un laboratoire a mis au point un alcootest pour contrôler le taux d'alcoolémie et les essais ont montré que 5% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété. 96% des personnes en état d'ébriété ont un alcootest positif et 98% des personnes sobres ont un alcootest négatif.

On considère les événements :

S : " être sobre " , $\bar{S}$: " être en état d'ébriété " , P : " avoir un alcootest positif " , $\bar{P}$: " avoir un alcootest négatif " .

1► Construire un arbre pondéré traduisant toutes les données de l'énoncé. (niveau 1 : S , $\bar{S}$)

2► Calculer la probabilité qu'une personne soit sobre et qu'elle ait un alcootest positif. (on veut $p(S\cap P)=0{,}019$)

3► Calculer la probabilité qu'une personne ait un alcootest positif.

on veut $p(P)$ on utilise ici la formule des probabilités totales : $p(P)=p(S\cap P)+p\left(\bar{S}\cap P\right)=0{,}019+0{,}05\times 0{,}96=0{,}067$

4► Calculer la probabilité d'être sobre si l'alcootest est positif. (on veut $p_P(S)=\dfrac{p(P\cap S)}{p(P)}=\dfrac{0{,}019}{0{,}067}=\dfrac{19}{67}$)

2 / Généralisation

définition

Soit Ω un univers. On dit que les événements A_1 , A_2 , ..., A_n forment une partition de Ω lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- aucun de ces événements n'est impossible; $\forall i\in\{1;2;\ldots;n\}\quad p(A_i)\neq 0$
- les événements sont deux à deux incompatibles ; $\forall i\neq j\quad A_i\cap A_j=\varnothing$
- la réunion de ces événements est Ω. $A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n=\Omega$

propriété

Les événements A_1 , A_2 , ..., A_n forment une partition de Ω. Alors pour tout événement B, on a :

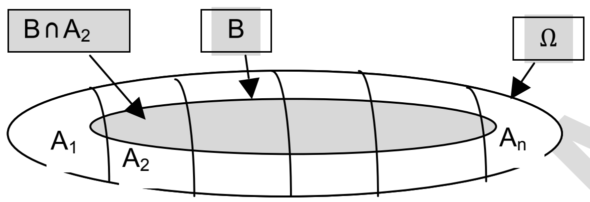
$p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) + \ldots + p(B\cap A_n)$. **(formule des probabilités totales)**

démonstration

B est la réunion des événements $(B\cap A_1)$; $(B\cap A_2)$; .... $(B\cap A_n)$. cad $B = (B\cap A_1)\cap(B\cap A_2)\cap\ldots\cap(B\cap A_n)$

- Les événements A_1 , A_2 , ..., A_n forment une partition de Ω ; cette partition induit une partition de l'événement B.
- A_1 , A_2 , ..., A_n sont deux à deux incompatibles, il en résulte que les événements $(B\cap A_1)$; $(B\cap A_2)$; .... $(B\cap A_n)$ sont aussi deux à deux incompatibles.

On a alors : $p(B) = p(B\cap A_1) + p(B\cap A_2) + \ldots + p(B\cap A_n)$



Conséquence

Avec les mêmes notations, on a :

$p(B) = p_{A_1}(B)\times p(A_1) + p_{A_2}(B)\times p(A_2)\ldots + p_{A_n}(B)\times p(A_n)$.

Exercice 4

Le tableau suivant donne la répartition des 1250 élèves d'un lycée selon leur classe et leur participation à l'atelier de création artistique.

	Seconde	Première	Terminale	
Participent à l'atelier	70	28	24	122
Ne participent pas à l'atelier	430	322	376	1128
	500	350	400	1250

On note A l'événement : " il suit l'atelier " ; S : " il est en Seconde " , P : " il est en Première " et T : " il est en Terminale"

1 / On choisit un élève de Seconde au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il suive l'atelier d'art ?

$p_S(A) = \frac{7}{50}$ (tableau)

2 / On choisit un élève du lycée au hasard.

a) Construire un arbre pondéré schématisant la situation. (niveau 1 : S , P , T)

b) Quelle est la probabilité que ce soit un élève de Seconde participant à l'atelier d'art ?

$p(A\cap S) = \frac{7}{50}\times\frac{50}{125} = \frac{7}{125}$ (arbre)

c) Quelle est la probabilité que l'élève choisi suive l'atelier d'art ?

$p(A) = p(A\cap S) + p(A\cap P) + p(A\cap T) = \frac{7+28+24}{1250} = \frac{122}{1250} = \frac{61}{625}$ (tableau)

d) Sachant que l'élève suit l'atelier, quelle est la probabilité qu'il soit un élève de Première ?

$p_A(P) = \frac{28}{122}$ (aide du tableau)

III. Indépendance de deux événements

1 / Indépendance de deux événements

définition
Deux événements A et B de probabilité non nulle sont dits **indépendants** si et seulement si l'une des deux égalités suivantes est vérifiée :

$$p_A(B) = p(B) \quad \text{ou} \quad p_B(A) = p(A)$$

Autrement dit, la réalisation de A n'influe pas sur la réalisation de B et inversement, , la réalisation de B n'influe pas sur la réalisation de A .

propriété
Deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants si et seulement si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Exercice 5
On tire au hasard une carte dans une jeu de 32 cartes. On considère les événements suivants :
A : " la carte choisie est un carreau " ; B : " la carte choisie est un roi " ; C : " la carte choisie est rouge ".

a) les événements A et B sont-ils indépendants ?
b) les événements A et C sont-ils indépendants ?
c) les événements B et C sont-ils indépendants ?

Solution du a)
Le jeu contient huit carreaux, quatre rois et seize cartes rouges

$$p(A) = \frac{8}{32} ; p(B) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} ; p(C) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

a) $A \cap B$ est l'événement : "la carte choisie est un roi de carreau " et $p(A \cap B) = \frac{1}{32}$.

D'autre part , $p(A) \times p(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$. ainsi, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

autre méthode : on peut déterminer $p_B(A) = \frac{1}{4}$. Ainsi $p(A) = p_B(A) = \frac{1}{4}$ ce qui prouve l'indépendance de A et B.

b) les événements A et C ne sont pas indépendants.
c) les événements B et C sont indépendants.

2 / Variables aléatoires indépendantes

définition
On dit que X et Y sont des variables aléatoires A et B **indépendantes** si pour tout entier i et tout entier j, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants

Exercice 6
On lance un dé parfaitement équilibré. On définit les variables aléatoires suivantes :
● X prend la valeur 1 si le résultat est pair, et la valeur -1 sinon.
● Y prend la valeur 2 si le résultat est 2 ou 5 , et la valeur 1 sinon.
Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3 / Modélisation d'expériences indépendantes : principe multiplicatif

On considère une expérience aléatoire qui consiste à enchaîner plusieurs épreuves.
Si chacune de ces épreuves se déroule dans des conditions qui ne dépendent pas du résultat des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves se déroulent de façon indépendante.

Exemple
On lance un dé puis on tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Un résultat de cette expérience est un couple (n° dé, carte) ; par exemple : (3, roi cœur).

propriété (admise)
Lors de la réalisation d'une série d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une liste de résultats est le produit des probabilités de chaque résultat.

On reprend l' exemple précédent : $p(\{2\ ,\ as\}) = p(\{2\}) \times p(\{as\}) =$ ……………………………………

4 / Expériences répétées

C'est un cas particulier du cas précédent ; les épreuves enchaînées sont toutes identiques.

Exercice 7 (type BAC)
Partie 1
Soient A et B deux événements indépendants.
Démontrer que les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants puis que les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Partie 2 ▶ application
Chaque matin de classe, Hakim peut être victime de deux événements indépendants :
● R : " il n'entend pas son réveil sonner "
● S : " son scooter tombe en panne "
Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0,1 et que celle de S est égale à 0,05.
Lorsqu'au moins l'un des deux événements se produit, Stéphane arrive en retard au lycée. Sinon il est à l'heure.

1 / Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Hakim entende son réveil sonner et que son scooter tombe ne panne.

2 / Calculer la probabilité que Hakim soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

3 / Au cours d'une semaine, Hakim se rend cinq fois au lycée.

4 / On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
Quelle est la probabilité que Hakim entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ?
(arrondir le résultat à la 4ème décimale)