Terminale S

Ch.1

Suites numériques
corrigé ➡ FICHE 3

Exercice 1

Pour tout entier n, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f_n(x)=x^n$.

➥ Démontrons par récurrence que pour tout entier n, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x non nul, on a : $f_n'(x)=nx^{n-1}$.

Initialisation : $f_0(x)=x^0=1$, f est une fonction constante donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. De plus :

$f_0'(x)=\left(x^0\right)'=0=0\times x^{0-1}$ la pté est initialisée.

Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n quelconque fixé, montrons alors qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$f_{n+1}(x)=x^{n+1}=x^n\times x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de fonctions dérivables. D'autre partons

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x)=\left(x^{n+1}\right)'=\left(x^n\times x\right)' &=\left(x^n\right)'\times x+x^n\times x' \\ &= nx^{n-1}\times x+x^n\times 1 \quad (HR)_< \\ &= nx^n+x^n \\ &=(n+1)x^n \quad cqfd \end{aligned}$$

La pté est héréditaire.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f_n'(x)=nx^{n-1}$.

Exercice 2

➥ Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $n!\geq 2^{n-1}$.

Initialisation : $1!=1$ et $2^{1-1}=2^0=1$. Ainsi $1!\geq 2^{1-1}$ vérifié.
La pté est initialisée.

Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n quelconque fixé, montrons alors qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$:

$$(n+1)!=n!\times(n+1)\geq 2^n\times \underbrace{(n+1)}_{\geq 2\ \forall n\geq 1} \geq \underbrace{2^n\times 2}_{2^{n+1}}$$

La pté est héréditaire.

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $n!\geq 2^n$

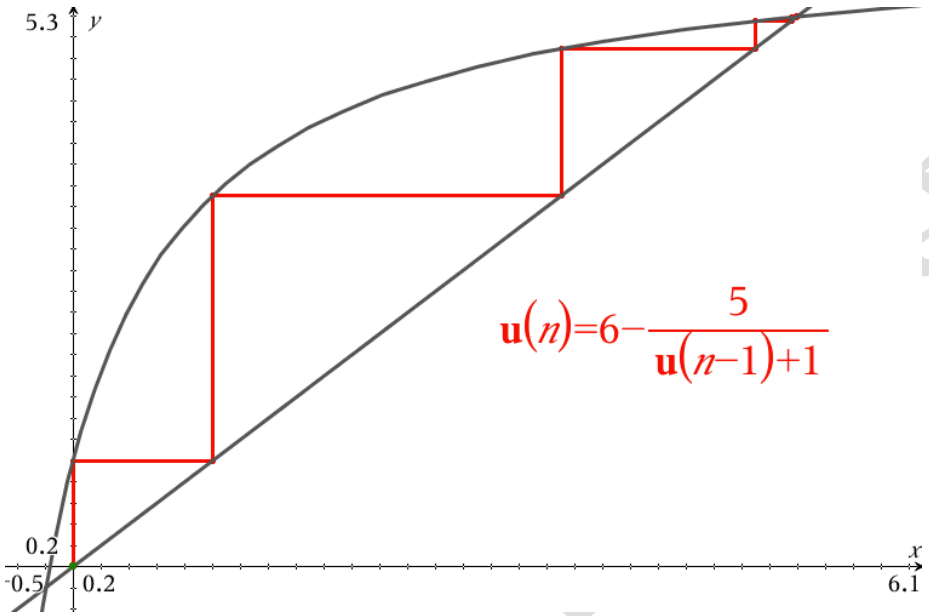
M.THS - Mainguy

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=6-\dfrac{5}{x+1}$.

La suite (u_n) est définie par $u_0=0$ et pour tout entier naturel, $u_{n+1}=f(u_n)=6-\dfrac{5}{u_n+1}$.

Représentation graphique des cinq premiers termes de la suite (construction en chemin) :



Il semble que la suite (u_n) soit strictement croissante.

a /

$$f(x)=x \Leftrightarrow x=6-\frac{5}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{6x+6-5}{x+1}$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)=6x+1$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2-5x-1}_{P(x)}=0$$

$P(x)$ est un polynôme de degré 2. Déterminons ses éventuelles racines :

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times(-1)=29$.

$\Delta>0$, le polynôme admet deux racines réelles dans $\mathbb{R}$.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5-\sqrt{29}}{2}<0$ $\left(\text{valeur exclue dans } [0;+\infty[\right)$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}=\alpha\simeq5{,}19$.

b / Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq u_{n+1}\leq\alpha$:

MATHS - Mainguy

Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = 6 - \dfrac{5}{u_0 + 1} = 6 - \dfrac{5}{0+1} = 1$.

Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n quelconque fixé. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$

$1 \leq u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1 < \alpha + 1$

$\dfrac{1}{\alpha+1} < \dfrac{1}{u_{n+1}+1} \leq \dfrac{1}{u_n+1} \leq 1$ $\left(la\ fonction\ inverse\ est\ strict^t\ décroissante\ sur\ ]0\,;+\infty[\,,\ ordre\ renversé\right)$

$-5 \leq -\dfrac{5}{u_n+1} \leq -\dfrac{5}{u_{n+1}+1} < -\dfrac{5}{\alpha+1}$

$0 \leq 6-5 \leq \underbrace{6 - \dfrac{5}{u_n+1}}_{u_{n+1}} \leq \underbrace{6 - \dfrac{5}{u_{n+1}+1}}_{u_{n+2}} < \underbrace{6 - \dfrac{5}{\alpha+1}}_{f(\alpha)=\alpha}$

La pté est héréditaire.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} < \alpha$

c / D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$, la suite (u_n) est donc croissante.

On sait aussi que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \alpha$, la suite (u_n) est donc majorée par α.

Ainsi, la suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente.

La limite l vérifie l'équation $l = f(l)$. On en déduit que $l = \alpha$.

a / Pour tout réel $e > 0$, déterminons, à l'aide d'un algorithme, le rang N tel que $|u_n - \alpha| < e$:

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     U EST_DU_TYPE NOMBRE
3     e EST_DU_TYPE NOMBRE
4     alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
5     n EST_DU_TYPE NOMBRE
6   DEBUT_ALGORITHME
7     LIRE e
8     n PREND_LA_VALEUR 0
9     U PREND_LA_VALEUR 0
10    alpha PREND_LA_VALEUR (5+sqrt(29))/2
11    TANT_QUE (abs(U-alpha)>=e) FAIRE
12      DEBUT_TANT_QUE
13      U PREND_LA_VALEUR 6-(5/(U+1))
14      n PREND_LA_VALEUR n+1
15      FIN_TANT_QUE
16    AFFICHER n
17  FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer e : 0.01
5
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer e : 0.000001
10
***Algorithme terminé***
```

Remarque : on pensera bien sûr à vérifier la validité de ces résultats en générant la suite (u_n) sur le tableur de la calculatrice !

b / Pour $e = 0{,}01$, on obtient $N = 5$. Pour $e = 10^{-6}$, on obtient $N = 10$.

N. Mainguy

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$ et les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ et $w_n = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n - u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = -\frac{2}{3}(u_{n+1} - u_n) = -\frac{2}{3}v_n$.

On reconnaît la formule de récurrence d'une suite géométrique de raison $q = -\frac{2}{3}$.

Son premier terme est : $v_0 = u_1 - u_0 = 1 - 0 = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = u_{n+2} + \frac{2}{3}u_{n+1} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3}u_{n+1} = u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = w_n$.

La suite (w_n) est donc constante.

On en déduit que pour tout entier naturel n, $w_n = w_0 = u_1 + \frac{2}{3}u_0 = 1$.

La suite (u_n) converge-t-elle ?

D'après les questions précédentes :

• on a d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n = u_{n+1} - u_n \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$

• d'autre part : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + \frac{2}{3}u_n = 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1 - \frac{2}{3}u_n$

On a alors : $u_n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3}u_n$ cad $u_n + \frac{2}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow \frac{5}{3}u_n = 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \Leftrightarrow u_n = \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ est de la forme (q^n) avec $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

Ainsi, quand $n \to +\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \\ 1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n \to 1 \\ \frac{3}{5}\left[1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right] \to \frac{3}{5} \end{array}\right\} d'où \quad \lim\limits_{+\infty} u_n = \frac{3}{5}$$

La suite (u_n) converge vers $\frac{3}{5}$.

MATHS - Mainguy