DS – Terminale S

suites partie 1

Exercice 1

Soit la suite définie pour $n \geq 1$ par : $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - n$.

1) Calculer les termes u_1, u_2, u_3. On donnera les valeurs approchées à 10^{-3} près.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$.

3) **Recopier et compléter** les pointillés de l'algorithme ci-contre de façon à ce qu'il donne la valeur de u_n, n étant donné.

4) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis remplir le tableau suivant en donnant les valeurs à 10^{-3} près.

5) Rentrer cet algorithme dans votre calculatrice puis remplir le tableau suivant donnant les valeurs à 10^{-3} près :

N	5	10	20	50
U				

Variables :
N, I entiers, U réel

Entrée et initialisation :
lire N
Affecter à U la valeur …

Traitement :
Pour I allant de … à N faire
Affecter à U la valeur …
Fin Pour

Sortie :
Afficher …

6) Quelle conjecture peut-on faire concernant la monotonie de la suite (u_n) ?
Démontrer ce résultat.

7) Quelle conjecture peut-on faire concernant la convergence de la suite (u_n) ?

Exercice 2

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

1) Montrer que $v_n \geq u_n$ pour tout $n \geq 1$.

2) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

3) Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

4) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont bornées.

Prérequis pour les exercices 3 et 4 :
on admet que :

- *toute suite croissante et majorée converge ;*
- *toute suite décroissante et minorée converge.*

Exercice 3 (BAC 2014)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : conjecture

1) Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles de u_1 et u_2.

2) Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4.

3) Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B : validation de la conjecture

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 3$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $-1 \leq v_n \leq 0$.

3) a / En calculant $v_{n+1} - v_n$, étudier la monotonie de la suite (v_n).
b / En déduire que la suite (v_n) converge.

4) On note l la limite de la suite (v_n). On admet que l appartient à l'intervalle $[-1\,;0]$.
Déterminer la valeur de l.

5) **BONUS** : les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?

Exercice 4 (BAC 2005)

Partie A

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$.

1) Démontrer que pour tout entier naturel , n, $u_n > \frac{23}{18}$.

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) Justifier que la suite (u_n) converge. Calculer sa limite.

Partie B

1) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Démontrer que : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{10^k} = \frac{1}{90}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

2) La suite (v_n) est définie par : $v_n = 1,2777\ldots7$ avec n décimales consécutives égales à 7 .

Ainsi $v_0 = 1,2$; $v_1 = 1,27$; $v_2 = 1,277$.

Exprimer v_n en fonction de n