Terminale S

Ch.14

Lois continues → fiche 2

Exercice 1

Souad vient tous les matins entre 7h et 7h45 chez Siham prendre un café.

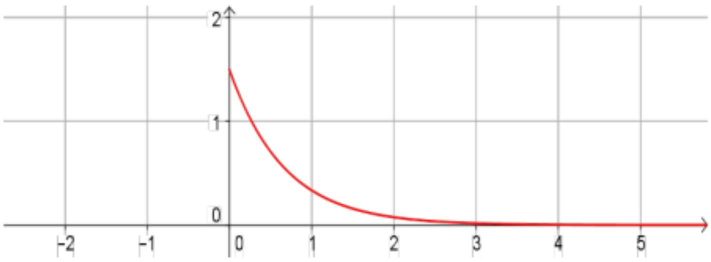
1. Sachant que Fred ne vient jamais en dehors de la plage horaire indiquée et qu'il peut arriver à tout instant avec les mêmes chances, quelle densité peut-on attribuer à la variable aléatoire "heure d'arrivée de Fred" ?
2. Calculer la probabilité que Fred sonne chez Siham :
   a) après 7h30 ? b) avant 7h10 ? c) entre 7h20 et 7h22 ? d) à 7h30 exactement ?
3. Calculer l'heure moyenne d'arrivée de Fred.

Exercice 2→BAC Guyane 2006

Partie A

Soit X une $v.a$ aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

On rappelle que $p(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\,dt$. La courbe donnée ci-dessous la fonction f de densité associée.



1/ Interpréter sur le graphique la probabilité $p(X \leq 1)$.

2/ Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ

Partie B

On pose $\lambda = 1,5$.

1/ Calculer $p(X \leq 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

2/ Calculer $p(X > 2)$.

3/ Déduire des résultats précédents l'égalité suivante : $p(1 \leq X \leq 2) = 0,173$ à 10^{-3} près.

4/ Calculer l'intégrale $G(x) = \int_0^a 1,5e^{-1,5t}\,dt$.

Déterminer l'espérance de la variable X.

Partie C

Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

→ si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
→ si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans $80\,\%$ des cas.
→ si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

1/ On prélève au hasard un cylindre dans la production.
   a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à $0,915$ à 10^{-3} près..
   b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

2/ On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres est suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.
   a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
   b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Exercice 3 ➥ BAC Liban 2006

La durée de vie d'un robot exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une $v.a$ aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$.

Ainsi la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à : $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

1. Déterminer λ arrondi à 10^{-2} près, pour que la probabilité $p(X > 6)$ soit égale à $0,3$.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

2. À quel instant t à un mois près, la probabilité qu'un robot tombe en panne pour la première fois est-elle de $0,5$?
3. Montrer que la probabilité qu'un robot n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années est de $e^{-0,4}$.
4. Sachant qu'un robot n'a pas eu de panne au cours des deux premières années, quelle est à 10^{-2} près, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?
5. On considère un lot de dix robots fonctionnant de manière indépendante.
   Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un robot qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années

Exercice 4

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité P de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $p([0\,;t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

représentant la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines.
Une étude statistique montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\,;200[) = 0,5$.

1/ Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2/ Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?

3/ On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \dfrac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$ et en déduire d_m à la semaine près.

Exercice 5

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur.
D'expérience, le concepteur sait que 9% des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que :

- 96% des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;
- 97% des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note :

- N l'événement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;
- A l'événement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

PARTIE A

1) Construire un arbre représentant la situation.

2) Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est $0,8763$.

3) Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir les résultats au dix-millième.

PARTIE B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage…).
On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) On sait que $p(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

Calculer la valeur exacte de λ.

2) On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa sœur qui vient de naître.
Calculer la probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires.
Arrondir le résultat au dix-millième.

PARTIE C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel le réel intérêt des enfants pour ce jouet.
À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J, où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ. Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1) Soit $X = \dfrac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?

2) On sait que $p(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.