Les matrices

chapitre 2 : calcul matriciel

I / Définitions

définition

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

Une matrice $n\times p$ (on dit aussi de format $(n\,;p)$ est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.

Les nombres contenus dans ce tableau sont appelés les coefficients de la matrice .

notation

La matrice M ci-contre peut-être notée $M=(a_{ij})$ où a_{ij} désigne le coefficient situé au croisement de la i ème ligne et de la j ème colonne.

$$M=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

vocabulaire

• lorsque $p=1$, on dit que M est une **matrice-colonne** ;

• lorsque $n=1$, on dit que M est une **matrice-ligne** ;

• lorsque $n=p$, on dit que M est une matrice **carrée d'ordre** n ;

• **la matrice nulle**, notée 0 est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

exemples

• On considère la matrice $M=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 5 & 7 & -3 \end{pmatrix}$.

M est une matrice de format $(3\,;4)$; $a_{14}=9$, $a_{32}=5$, $a_{23}=4$; $a_{31}=0$.

• La matrice $N=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice-ligne, elle est de format $(1\,;7)$.

• La matrice $P=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ est un matrice carrée d'ordre 3.

• Les coordonnées d'un vecteur du plan est une matrice colonne 2×1

propriété

Deux matrices $M=(a_{ij})$ et $N=(c_{ij})$ sont égales si et seulement si

• elles sont de même format ;

• pour tout $1\le i\le n$ et tout $1\le j\le p$, on a $a_{ij}=c_{ij}$.

exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Écrire la matrice carrée d'ordre 3 telle que :

- $a_{31} = -1 \quad ; \quad a_{33} = -6 \quad ; \quad a_{21} = 0$
- $a_{11} = -2a_{31} \quad ; \quad a_{13} = 2a_{11} + 3$
- $5a_{23} - 1 = a_{33} = 2a_{22} \quad ; \quad (2a_{32} + 4) = a_{21} = -4a_{12}$

2) Déterminer les valeurs de x et y telles que les matrices A et B sont égales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1-x & 3-y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -x^2 \\ x^2+x+1 & 2y-9 \end{pmatrix}$$

définitions

- Une matrice carrée est **symétrique** si et seulement si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i \neq j$.
- Une matrice **triangulaire d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n qui possède un triangle uniquement composé de 0 Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
- Une matrice **diagonale d'ordre** n est une matrice carrée d'ordre n qui contient uniquement des 0 sauf sur sa diagonale.
- La matrice **unité d'ordre** n, notée I_n, est la matrice carrée d'ordre n qui ne possède que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.
- La **matrice transposée** d'une matrice A de format $(n\,;p)$ est la matrice notée A^T de format $(p\,;n)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A

exemples

- $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire d'ordre 4.

- $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 2.

- $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique d'ordre 3.

- $P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3.

- Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 21 & 0 \\ 11 & 4 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 21 & 11 & -9 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $\left(A^T\right)^T = A$

II / Opérations sur les matrices

A ➤ addition, soustraction de matrices

définition

On appelle somme de deux matrices **de même format**, la matrice obtenue, en additionnant les coefficients occupant la même position dans chacune des matrices.

exemple

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -10 & 2 \\ -3 & 1 & -3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -8 \\ 2 & 7 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -7 & 16 \end{pmatrix}$$

propriétés

Soit A, B, C trois matrices de même format. Alors :

- $A+B=B+A$; on dit que la somme de matrices est **commutative** ;
- $(A+B)+C=A+(B+C)$; on dit que la somme de matrices est **associative** ;
- $0+A=A+0=A$; on dit que la matrice nulle est **neutre pour l'addition de matrices**.

B ➤ multiplication d'une matrice par un réel

définition

On appelle produit d'une matrice A par un nombre réel k, la matrice notée kA obtenue, en multipliant tous les coefficients ce cette matrice par ce réel k.

exemple

Soit $A=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \end{pmatrix}$ alors $-2A=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -10 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & -20 & 0 \end{pmatrix}$

définition et propriétés

Soit A et B deux matrices de même format. Alors :

- $0A=0$ et $1A=A$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ et $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- On appelle **matrice opposée de** A, la matrice $-1A$ notée $-A$.

exercice 2

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculer : $2A+3B$; $3C+2I_3$; $-2A+3C$.

4) Vérifier les résultats à la calculatrice.

C ➤ multiplication de deux matrices

C.1 / produit d'une matrice carrée par une matrice colonne

définition

Soit A une matrice carrée de d'ordre n et B une matrice colonne à n lignes telles que :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice carrée A par la matrice colonne B est la matrice colonne à n lignes notée $A\times B$ égale à :

$$A\times B=\begin{pmatrix} a_{11}\times b_1+a_{12}\times b_2+\dots+a_{1n}\times b_n \\ a_{21}\times b_1+a_{22}\times b_2+\dots+a_{2n}\times b_n \\ \dots \\ a_{n1}\times b_1+a_{n2}\times b_2+\dots+a_{nn}\times b_n \end{pmatrix}$$

exemple

On donne $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1\times5+2\times(-4)+0\times1 \\ 3\times5+4\times(-4)+0\times1 \\ 0\times5+(-2)\times(-4)+5\times1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -13 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

remarque

le produit de deux matrices est possible si et seulement si le nombre de colonnes de la première est égale au nombre de lignes de la deuxième. De plus, si A est une matrice de format $(n\,;p)$ et B une matrice de $(p\,;m)$ alors $A\times B$ est une matrice de format $(n\,;m)$.

C.2 / produit de deux matrices carrées

définition

Soit A et B deux matrices de même format.

Le produit de A et B est la matrice, notée $A\times B$, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

exemple

Soit $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$A\times B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\times1+0\times5 & -2\times(-7)+0\times(-3) \\ 3\times1+4\times5 & 3\times(-7)+4\times(-3) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 23 & -33 \end{pmatrix}$$

remarque
Lorsque les produits AB et BA sont bien définis, en général AB n'est pas égal à BA. Le produit de matrices n'est pas commutatif.

propriétés
Soit A, B, C trois matrices dont les formats permettent d'effecteur les calculs indiqués et soit k un réel. On a :
- $(AB)C = A(BC)$; le produit de matrices est **associatif** ;
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$; **le produit de matrices est distributif par rapport à l'addition** ;
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$.

remarque
Lorsque les produits utilisés sont définis :
Si $A=0$ ou $B=0$ alors $AB=0$ mais la réciproque est fausse !

propriété (cas particulier)
Soit A une matrice carrée d'ordre n. On a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

D ➤ Puissance d'une matrice carrée

définition
Soit A une matrice carrée d'ordre p et n un entier naturel non nul.
La puissance n ième de la matrice A est la matrice carré d'ordre p telle que :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\ fois}$$

Par convention : $A^0 = I_p$

conséquence
Pour tous entiers naturels n et m, et toute matrice carrée A d'ordre p, on a :

$$A^m \times A^n = A^{m+n}$$

propriété (cas particulier des matrices diagonales)

Soit A une matrice diagonale d'ordre p. On a $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{pp} \end{pmatrix}$

Alors pour tout entier naturel n, on a : $A^n = \begin{pmatrix} a_{11}^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_{pp}^n \end{pmatrix}$

exercice 3 :

Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer J^2.

2) Démontrer que : $A=I_2+4J$.

3) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$: $A^n=I_2+4nJ$.

D ➤ Inverse d'une matrice carrée

définition

Soit A une matrice carrée d'ordre p.

La matrice A est dite **inversible**, s'il existe une matrice carrée B telle que $AB=BA=I_p$.

La matrice B, lorsqu'elle existe, est unique et s'appelle **matrice inverse de** A. Elle est notée A^{-1}.

démonstration de l'unicité

Supposons que la matrice A est inversible. Soient B et C deux matrices carrées d'ordre p telles que :
$AB=BA=I_p$ et $AC=CA=I_p$. Alors $B=B\times I_p=\underbrace{B\times A}_{I_p}\times C=I_p\times C=C$. D'où $B=C$.

remarques

• Tout nombre réel a non nul admet un inverse a^{-1}. Ce n'est pas le cas des matrices. Cette fois encore (c'était le cas pour la non commutativité du produit matriciel), on ne retrouve pas d'analogie entre réels et matrices.

• La matrice O_p n'est pas inversible. En effet, pour toute matrice A carrée d'ordre p : $O_p\times A=A\times O_p=O_p\neq I_p$

propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 : $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

A est **inversible**, si et seulement si $ad-bc\neq 0$

Dans ce cas, $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

exemple

La matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1}.

exercice 4 :

Démontrer la formule de A^{-1}. Indication : on posera $A^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

exercice 5 :

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2+5A.

2) En déduire que la matrice A est inversible. Préciser son inverse A^{-1}.

solution

1)

$$A^2+5A=\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9+1+1&-3-3+1&-3+1-3\\-3-3+1&1+9+1&1-3-3\\-3+1-3&1-3-3&1+1+9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15&5&5\\5&-15&5\\5&5&-15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}11&-5&-5\\-5&11&-5\\-5&-5&11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-15&5&5\\5&-15&5\\5&5&-15\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-4&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

2) On en déduit que :

$$A^2+5A=-4I \Leftrightarrow A\left(A+5I\right)=-4I$$

$$\Leftrightarrow A\times\left(-\frac{1}{4}\right)\left(A+5I\right)=I$$

La matrice $B=-\frac{1}{4}\left(A+5I\right)$ est telle que $AB=I$. D'où $B=A^{-1}=-\frac{1}{4}\left(A+5I\right)$ est la matrice inverse de A **.**

Ainsi : $A^{-1}=-\frac{1}{4}\left(\begin{pmatrix}-3&1&1\\1&-3&1\\1&1&-3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\right)=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2&-1/4&-1/4\\-1/4&-1/2&-1/4\\-1/4&-1/4&-1/2\end{pmatrix}$

propriété

Soit A , M et N trois matrices carrée d'ordre p et O_p la matrice nulle d'ordre p .

On suppose que A est inversible . Alors :

• si $AM=O_p$ $M=N$ alors $M=O_p$ • si $AM=AN$ alors $M=N$

exercice 6 :

Démontrer les deux propriétés précédentes.

propriétés

Pour toutes matrices A et B carrées d'ordre p ,

•Si A est inversible alors l'est aussi et $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.

• Si A et B sont inversibles alors la matrice $A\times B$ est inversible et $\left(A\times B\right)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$

démonstration

$\left(A\times B\right)\times\left(B^{-1}\times A^{-1}\right)=A\times\underbrace{B\times B^{-1}}_{=I}\times A^{-1}=\underbrace{A\times I}_{=A}\times A^{-1}=A\times A^{-1}=I$. D'où le résultat.

III / Écriture matricielle d'un système linéaire

On considère un système linéaire (S) de p équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$.

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = b_p \end{cases}$$

Posons : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

Alors le système linéaire (S) s'écrit sous forme matricielle : $AX = B$.

exemple :

On considère le système $(S)\begin{cases} 3x - y + z = -1 \\ \quad y + 4z = 5 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$.

Il s'écrit sous forma matricielle : $AX = B$ avec : $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

définition et propriété

Soit (S) un système dont une écriture matricielle est $AX = B$ où A est une matrice carrée d'ordre p inversible.

Ce système est appelé **système de Cramer.** Il admet une unique solution X définie par : $X = A^{-1}B$

exercice 7

Résoudre le système (S) de l'exemple précédent.

(On pourra aussi s'intéresser à la situation 3 du livre p.496)