Terminale S

Ch.15

Nombres complexes – partie 2
→ corrigé FICHE 1

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Écriture sous la forme $a+ib$ des nombres complexes suivants :

- Nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$: on a $|z|=2$ et $\arg(z)=\frac{\pi}{3}$

Conclusion : $z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$

- Nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$: on a $|z|=3$ et $\arg(z)=-\frac{\pi}{8}$

D'où $z=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=3\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)$; déterminons les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$:

On sait que :

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1\Leftrightarrow\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}\quad\left(car\ \cos\frac{\pi}{8}>0\right)$$

De même :

$$\cos\frac{\pi}{4}=\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\quad\left(car\ \sin\frac{\pi}{8}>0\right)$$

Conclusion : $z=3\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)=3\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+3i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) Pour tout complexe z différent de i, on pose : $z'=\frac{iz-1}{z-i}$. Prouvons que : $z'\in\mathbb{R}\Leftrightarrow|z|=1$

Posons $z=x+iy$. On a alors :

$$z'=\frac{iz-1}{z-i}=\frac{i(x+iy)-1}{x+iy-i}=\frac{(-y-1)+ix}{x+i(y-1)}=\frac{((-y-1)+ix)(x-i(y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$=\frac{(x(-y-1)+x(y-1))+i(x^2-(y-1)(-y-1))}{x^2+(y-1)^2}=\frac{(x(-y-1)+x(y-1))}{x^2+(y-1)^2}+i\frac{(x^2-(y-1)(-y-1))}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 &\Leftrightarrow \frac{\left(x^2-(y-1)(-y-1)\right)}{x^2+(y-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+(y-1)(y+1)\right)}{x^2+(y-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2-1=0 \quad et \quad z \neq i \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2=1 \\ &\Leftrightarrow |z|^2=1 \\ &\Leftrightarrow |z|=1 \quad \textit{cqfd} \end{aligned}$$

3)

a/ $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$; on a alors $1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Ainsi $|z^2| = \left|(1-i)^2\right| = |1-i|^2 = \sqrt{2}^2 = 2$ et $\arg(z^2) = 2\arg(z) = 2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\text{conclusion : } z^2 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

b/ Posons $z = \frac{z_1}{z_2}$ avec $z_1 = 1-i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1+i$. Déterminons les formes trigonométriques de z_1 et z_2 :

$|z_1| = \left|1-i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$ et $z_1 = 2\left(\frac{1}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$|z_2| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

On a alors : $|z| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ et $\arg(z) = \arg\left(\frac{z_1}{z12}\right) = \arg(z_1)-\arg(z_2) = -\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = -\frac{7\pi}{4}$

$$\boxed{\text{conclusion : } z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right)}$$

c/ Posons $z_1 = \sqrt{3}+i$ et $z_2 = 1+i$. On a vu à la question précédente que $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

D'autre part, $|z_1| = \left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{4} = 2$ et $z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\times\frac{1}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

On en déduit que $|z| = \left|\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}{(1+i)^{12}}\right| = \frac{\left|\left(\sqrt{3}+i\right)^9\right|}{\left|(1+i)^{12}\right|} = \frac{\left|\sqrt{3}+i\right|^9}{|1+i|^{12}} = \frac{2^9}{\sqrt{2}^{12}} = \frac{2^9}{2^6} = 2^3 = 8$

et $\arg(z) = \arg\left(z_1^9\right)-\arg\left(z_2^{12}\right) = 9\arg(z_1)-12\arg(z_2) = \frac{9\pi}{6}-\frac{12\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}-3\pi = -\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}[2\pi]$

$$\boxed{\text{conclusion : } z = 8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

Exercice 2

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) À chaque point M d'affixe z du plan, on associe le point M' d'affixe $z' = (z-1)(\overline{z}-i)$. Posons $z = x+iy$:

$$z' = z\overline{z} - iz - \overline{z} + i = x^2+y^2 - i(x+iy) - (x-iy) + i = (x^2+y^2-x+y) + i(-x+y+1)$$

$$z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2-x+y=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

L'ensemble des points M tels que les points M' appartiennent à l'axe des imaginaires purs, est le cercle de centre $\Omega\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) Dans chacun des cas suivants, écrire sous la forme exponentielle et en déduire la forme algébrique de $\overline{z}$ et $\frac{1}{z}$:

a / $z_1 = \dfrac{6}{1+i} = \dfrac{6e^{i\times 0}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{3\times 2}{\sqrt{2}} \times e^{i\left(0-\frac{\pi}{4}\right)} = 3\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

On sait que $\left|\overline{z_1}\right| = |z_1| = 3\sqrt{2}$ *et* $\arg\left(\overline{z_1}\right) = -\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$;

d'où $\overline{z_1} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3+3i$

On sait que $\left|\dfrac{1}{z_1}\right| = \dfrac{1}{|z_1|} = \dfrac{1}{3\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$;

d'où $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{6}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}i$

2)

b / On a $3i = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ Ainsi : $z_2 = 3ie^{i\frac{2\pi}{3}} = 3e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 3e^{i\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{6}\right)} = 3e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

On sait que $\left|\overline{z_2}\right| = |z_2| = 3$ *et* $\arg\left(\overline{z_2}\right) = -\arg(z_2) = -\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}[2\pi]$;

d'où $\overline{z_2} = 3e^{5i\frac{\pi}{6}} = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

On sait que $\left|\dfrac{1}{z_2}\right| = \dfrac{1}{|z_2|} = \dfrac{1}{3}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z_2}\right) = -\arg(z_2) = -\dfrac{7\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}[2\pi]$;

d'où $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{1}{3}e^{5i\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{6} + i\dfrac{1}{6}$

c/ $z_3 = -12e^{i\frac{\pi}{4}} = 12\times(-1)\times e^{i\frac{\pi}{4}} = 12e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \times e^{i\frac{\pi}{4}} = 12e^{i\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = 12e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$

On sait que $\left|\overline{z_3}\right| = |z_3| = 12$ *et* $\arg\left(\overline{z_3}\right) = -\arg(z_3) = -\frac{5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$;

d'où $\overline{z_1} = 12e^{3i\frac{\pi}{4}} = 12\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 12\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6\sqrt{2} + 6\sqrt{2}i$

On sait que $\left|\dfrac{1}{z_3}\right| = \dfrac{1}{|z_3|} = \dfrac{1}{12}$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z_3}\right) = -\arg(z_3) = \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$;

d'où $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{12}e^{3i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{1}{12}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{24} + i\dfrac{\sqrt{2}}{24}$

Exercice 3 ➨ La Réunion 2010

Le plan complexe est rapporté à un repère orthnormal $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$. On considère le point A d'affixe $1+i$.

On associe , à tout point M du plan d'affixe $z \neq 0$, le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1-i}{z}$.

M' est appelé point image du point M.

1) a/ $z_{B'} = \dfrac{z_B - 1 - i}{z_B} = \dfrac{i-1-i}{i} = \dfrac{-1}{i} = \dfrac{-i}{i^2} = i$. Ainsi, le point B' a pour affixe i

On a donc $z_{B'} = z_B$, on dit que B est un point invariant.

b / $z' = 1 \Leftrightarrow \dfrac{z-1-i}{z} = 1 \Leftrightarrow z-1-i = z \Leftrightarrow -1-i = 0$. ABSURDE ! Ainsi, pour tout point M d'affixe z , on a $z' \neq 1$ (z' affixe de M')

2) Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est telle que $|z'| = 1$.

$$
\begin{aligned}
|z'| = 1 &\Leftrightarrow |z-1-i|^2 = |z|^2 \Leftrightarrow |x+iy-1-i|^2 = |z|^2 \\
&\Leftrightarrow |(x-1)+i(y-1)|^2 = |x+iy|^2 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 \\
&\Leftrightarrow -2x - 2y + 2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x + y - 1 = 0
\end{aligned}
$$

L'ensemble des points M du plan tels que $|z'| = 1$ est la droite d'équation : $x+y-1=0$ privé du point de coordonnées $(1\,;1)$.

3) Déterminons l'ensemble des points M du plan d'affixe z non nulle pour lesquels l'affixe du point M' est un nombre réel :

$$
\begin{aligned}
z' = \frac{z-1-i}{z} = \frac{x+iy-1-i}{x+iy} &= \frac{\big((x-1)+i(y-1)\big)(x-iy)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x(x-1)+y(y-1)+i\big(x(y-1)-y(x-1)\big)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x(x-1)+y(y-1)}{x^2+y^2} + i\frac{\big(x(y-1)-y(x-1)\big)}{x^2+y^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \\
&\Leftrightarrow x(y-1) - y(x-1) = 0 \quad avec\ (x\,;y) \neq (0\,;0) \\
&\Leftrightarrow xy - x - xy + y = 0 \quad avec\ (x\,;y) \neq (0\,;0) \\
&\Leftrightarrow -x + y = 0 \quad avec\ (x\,;y) \neq (0\,;0) \\
&\Leftrightarrow y = x \quad avec\ (x\,;y) \neq (0\,;0)
\end{aligned}
$$

L'ensemble des points M d'affixe z tel que z' est réel, est la droite d'équation $y = x$ privée du point de l'origine.