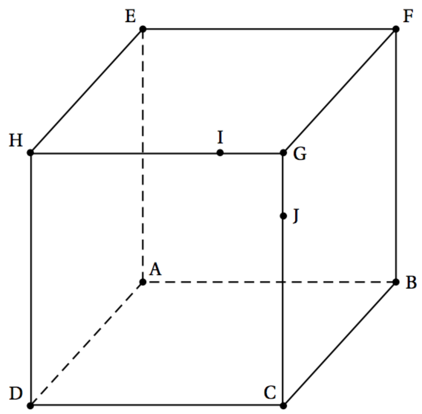
Préparation n °1 au fameux DS du samedi

Exercice 1 — 3 points

On considère le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous. On définit les points I et J respectivement par :

$$\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG} \text{ et } \overrightarrow{JG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CG}$$



1) **Sur le document réponse donné en annexe**, à rendre avec la copie, tracer sans justifier, la section du cube par le plan (IJK) où K est un point du segment $[BF]$.
2) **Sur le document réponse donnée en annexe**, à rendre avec la copie, tracer sans justifier, la section du cube par le plan (IJL) où L est un point de la droite (BF).
3) Existe-t-il un point P appartenant à la droite (BF) tel que la section du cube par le plan (IJP) soit un triangle équilatéral ? Justifier votre réponse.

Exercice 2 — 5 points

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

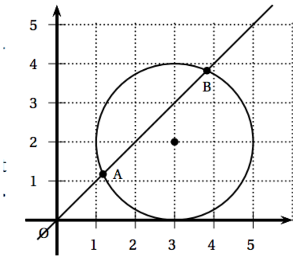
1) Zoé se rend au travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre. Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80% des cas. Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.
   Affirmation 1 :
   « Zoé utilise sa voiture un jour sur deux ».

2) On considère les points $E(2\,;1\,;\,-3)$ et $F(1\,;\,-1\,;2)$ dans un repère du plan de l'espace.
   Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (EF) est donnée par :
   $$\begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \\ z = 7 - 10t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3) **Affirmation 3 :** Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une unique solution.

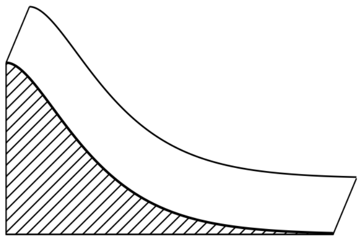
4) **Affirmation 4 :** Si $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$ alors $f = g$ sur $[0\,;1]$.

5) Dans le plan complexe, on note S l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie les deux conditions : $|z-1| = |z-i|$ et $|z-3-2i| \leq 2$.
Sur la figure ci-contre, on a tracé le cercle de centre le point de coordonnées $(3\,;2)$ et de rayon 2 et la droite d'équation $y = x$ qui coupe le cercle en A et B.
Affirmation 5 : S est le segment $[AB]$.



Exercice 3 — *4 points*

Le directeur d'un zoo souhaite construire un toboggan pour ses pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

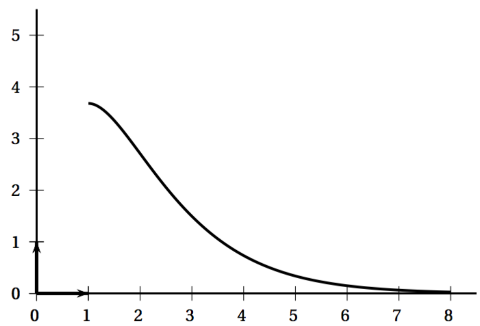


Partie A : modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;8]$ par :

$$f(x) = (ax+b)e^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ désignent deux entiers naturels.}$$

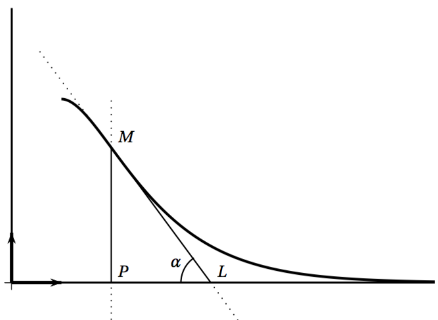
La courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous dans une repère orthonormé dont l'unité est le cm.



On souhaite que la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1soit horizontale. On souhaite également que le haut du toboggan soit situé entre 3,5 et 4m de haut.
Déterminer les valeurs de a et b.

Partie B : Une contrainte à vérifier

Dans cette partie, on admet que la fonction f est définie sur $[1\,;8]$ par : $f(x) = 10xe^{-x}$.
Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan. On considère un point M de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
la figure suivante illustre la situation :



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;8]$.
   Démontrer que pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$, $f'(x) = 10(1-x)e^{-x}$.
   Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;8]$.
2) Soit x un réel de l'intervalle $[1\,;8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.
3) Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?

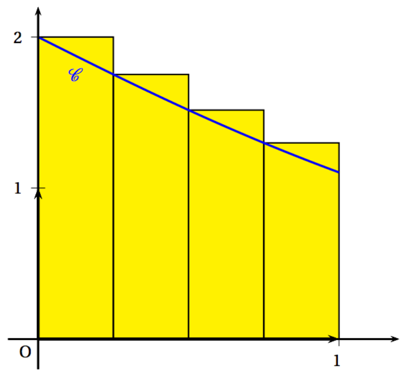
Exercice 4 — *4 points*

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$.
On note Cf la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) **Étude de la fonction f.**
   a/ Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe Cf avec les axes du repère.
   b/ Étudier les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe Cf.
   c/ Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2) **Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.**
   On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses ; la courbe Cf et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
   a/ Dans cette question, on découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en quatre intervalles de même longueur :
   - Sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$.
   - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\,;\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$.
   - Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   - Sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4}\,;1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$.

   Cette construction est illustrée ci-dessous.



3) a/ Expliquer le rôle de l'algorithme ci-dessous.

Variables :	k est un nombre entier
	S est un nombre réel
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0
Traitement :	Pour k variant de 0 à 3
	Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$
	Fin Pour
Sortie :	Afficher S

   b/ Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.
   c/ Dans cette question, N est un entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle $[0\,;1]$ en N intervalles de même longueur. Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2) a/.
   Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des N rectangles ainsi construits.

4) On admet que : $aire\ (D) = \int_0^1 f(x)dx = 3 - 4e^{-1}$.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant $aire(D)$ par la valeur trouvée avec l'algorithme de la question 2)a/.

Exercice 5 — 4 points

On considère une droite $\mathscr{D}$ munie d'un repère $(O\,;\vec{\imath})$.

Soit (A_n) la suite de points de la droite $\mathscr{D}$ ainsi définie :

- A_0 est le point d'abscisse 0 ;
- A_1 est le point d'abscisse 1 ;
- pour tout entier naturel n, le point A_{n+2} est le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

1) a/ Placer sur un dessin la droite $\mathscr{D}$, les points A_0 ; A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4 ; A_5 ; A_6.
(On prendra 10 cm comme unité graphique)

b/ Pour tout entier naturel n, on note a_n l'abscisse du point A_n. Sur la feuille de calcul ci-dessous, on a généré la suite (a_n).

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	a(n)	0	1	0,5	0,75

- Quelle formule a été saisie dans la cellule D2 et étirée à droite ?
- Donner les valeurs de a_0 ; a_1 ; a_2 puis calculer a_3 ; a_4 ; a_5 ; a_6.

c/ Pour tout entier naturel n, justifier l'égalité : $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

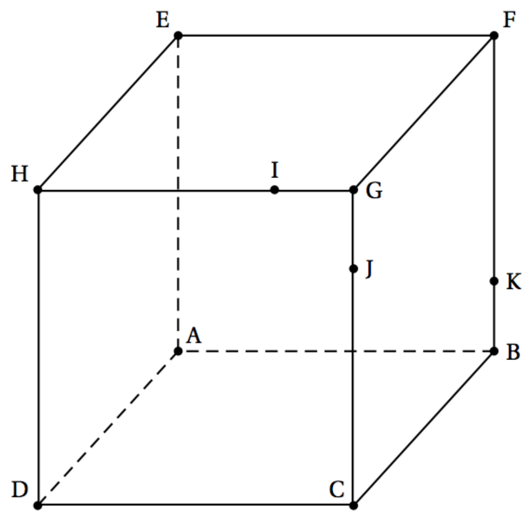
2) Démontrer par récurrence, que pour tout entier n, $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 1$.

3) Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - \frac{2}{3}$.
Démontrer que (v_n) est une suite géométrique. Préciser son 1er terme et sa raison.

4) Utiliser ce résultat afin de déterminer la limite de la suite (a_n).

Annexe à rendre avec la copie

Exercice 4, question 1



Exercice 4, question 2