MODULE MATHS

Algorithmique

Exercice (facile)

La méthode d'Al-Khuwarizmï

Pour déterminer la solution positive de l'équation : $x^2+12x=108$, voici comment procédait Al-Khuwarizmï, mathématicien de IXe siècle.

- **Diviser 12 par 2**
- **Élever ce quotient au carré**
- **Ajouter ce carré à 108**
- **Prendre la racine carrée de cette somme**
- **Retrancher à cette racine carrée le quotient du début**

1) a / Vérifier que l'équation $x^2+12x=108$ admet deux solutions de signes contraires et que l'algorithme proposé donne la solution positive.

b / Utiliser la méthode d'Al-Khuwarizmï pour déterminer la solution positive de l'équation $x^2+16x=80$.

2) a / Prouver que toute équation du type $x^2+bx=c$ admet deux racines de signes contraires. Pour cela, étudier le signe du produit des racines.

b / Réaliser un algorithme sur Algobox qui donne la solution positive d'une telle équation avec la méthode d'AL-Khuwarizmï.

Défi

Dans un récipient de forme cylindrique, de rayon 4 cm, on verse de l'eau jusqu'à une hauteur de 3,75 cm. On veut alors placer une bille dans le récipient de façon à ce que le liquide la recouvre complètement.
Le problème consiste à déterminer le rayon de cette bille.

MATHS - Mainguy

1) Notons V_1 le volume d'eau avant de plonger la bille : $V_1 = \pi R^2 \times h = \pi \times 4^2 \times \frac{15}{4} = 60\pi$;

soit V_2 le volume de la bille : $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$;

notons V_3 le volume du cylindre final contenant l'eau et la bille : $V_3 = \pi R^2 \times h = \pi \times 4^2 \times 2R = 32\pi R$.

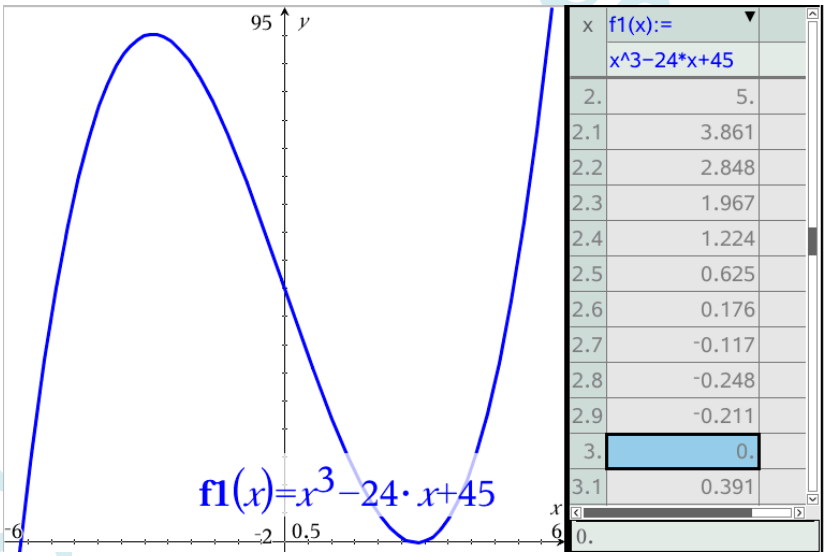
On a alors : $V_3 = V_1 + V_2$ c'est-à-dire :

$$60\pi + \frac{4}{3}\pi R^3 = 32\pi R \Leftrightarrow 15\pi + \frac{1}{3}\pi R^3 = 8\pi R$$
$$\Leftrightarrow 45 + R^3 = 24R$$
$$\Leftrightarrow R^3 - 24R + 45 = 0$$

CQFD

2) La bille pouvant être introduite dans le récipient, son diamètre est inférieur à celui du récipient.
Ainsi, $0 \leq 2R \leq 8$ d'où $R \in [0\,;4]$.

3)



x	f1(x):= x^3−24*x+45
2.	5.
2.1	3.861
2.2	2.848
2.3	1.967
2.4	1.224
2.5	0.625
2.6	0.176
2.7	-0.117
2.8	-0.248
2.9	-0.211
3.	0.
3.1	0.391

0.

4) L'une de ces solutions est 3.
L'autre solution α vérifie :
$2{,}6 < \alpha < 2{,}7$.

5) Algorithme qui affiche un encadrement à $0{,}1$ près de la solution dans $[2\,;3]$.

Code de l'algorithme

```
1   VARIABLES
2     k EST_DU_TYPE NOMBRE
3     k1 EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DEBUT_ALGORITHME
5     k PREND_LA_VALEUR 2
6     TANT_QUE (F1(k)*F1(k+0.1)>0) FAIRE
7       DEBUT_TANT_QUE
8       k PREND_LA_VALEUR k+0.1
9       FIN_TANT_QUE
10    k1 PREND_LA_VALEUR k+0.1
11    AFFICHER "alpha est compris entre "
12    AFFICHER k
13    AFFICHER " et "
14    AFFICHER k1
15  FIN_ALGORITHME
16
17 Fonction numérique utilisée :
18 F1(x)=pow(x,3)-24*x+45
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
alpha est compris entre 2.6 et 2.7
***Algorithme terminé***
```

MATHS guy