

MODULE MATHS

perfectionnement / LOI BINOMIALE

Exercice

Partie A : étude du cas $n = 3$

Soit X la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(3; p)$ avec $p = \frac{b}{a+b}$. On pose $q = 1 - p$.

$$1) \quad q = 1 - p = 1 - \frac{b}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b} = \frac{a}{a+b}.$$

2)

$$\begin{aligned} p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 &= p^3 + 3p^2(1-p) + 3p(1-p)^2 + (1-p)^3 \\ &= p^3 + (1-p)[3p^2 + 3p(1-p) + (1-p)^2] \\ &= p^3 + (1-p)[3p^2 + 3p - 3p^2 + 1 - 2p + p^2] \\ &= p^3 + (1-p)(1 + p + p^2) \\ &= p^3 + 1 + p + p^2 - p - p^2 - p^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

3) On a alors :

$$\begin{aligned} p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a+b}\right)^3 + 3\left(\frac{b}{a+b}\right)^2\left(\frac{a}{a+b}\right) + 3\left(\frac{b}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{a}{a+b}\right)^3 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{b^3 + 3b^2a + 3ab^2 + a^3}{(a+b)^3} = 1 \\ &\Leftrightarrow b^3 + 3b^2a + 3ab^2 + a^3 = (a+b)^3 \end{aligned}$$

Partie B : étude du cas général

Soit Y la variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ avec $n > 0$, $p = \frac{b}{a+b}$ et $q = 1 - p$.

$$1) \quad \text{Pour tout } 0 \leq k \leq n, \quad p(Y = k) = \binom{n}{k} p^k \times q^{n-k}.$$

$$2) \quad \text{On sait que : } \sum_{k=0}^n p(Y = k) = 1 \text{ ce qui revient à dire que } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1.$$

3) On a alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = 1 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{b}{a+b}\right)^k \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-k} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b^k}{(a+b)^k} \times \frac{a^{n-k}}{(a+b)^{n-k}} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{b^k \times a^{n-k}}{(a+b)^{k+n-k}} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{a^{n-k} b^k}{(a+b)^n} = 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{(a+b)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = 1 \\
 &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = (a+b)^n
 \end{aligned}$$

Partie C : application

1) Pour $n = 2$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k &= (a+b)^2 \Leftrightarrow \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = (a+b)^2 \\
 &\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2
 \end{aligned}$$

On retrouve l'identité remarquable $(a+b)^2$.

2) a/ Triangle de Pascal jusqu'à $n = 5$.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

b/ Pour $n = 4$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^4 \binom{4}{k} a^{4-k} b^k &= (a+b)^4 \Leftrightarrow \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 = (a+b)^4 \\
 &\Leftrightarrow a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + ab^3 + b^4 = (a+b)^4
 \end{aligned}$$

Pour $n = 5$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k &= (a+b)^5 \Leftrightarrow \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 = (a+b)^5 \\
 &\Leftrightarrow a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 = (a+b)^5
 \end{aligned}$$