Préparation au fameux DS du samedi (n °2)

Exercice 1 *5 points*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

On désigne par A, B et J les points d'affixes respectives $-i$, $1-i$ et i.

On désigne par Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et par C le cercle de centre O et de rayon 1.

À tout point M d'affixe z distincte de $1-i$, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{i(z+i)}{z-1+i}.$$

Le point M' est appelé image de M.

2) Calculer les affixes des points A' et O'.

3) Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice (unité graphique : 4 cm).

4) Montrer que l'équation $z = \frac{i(z+i)}{z-1+i}$ admet deux solutions que l'on précisera.
On note E et F les points qui ont pour affixes respectives ces solutions.
Justifier que les points E et F appartiennent au cercle C et les placer sur la figure.

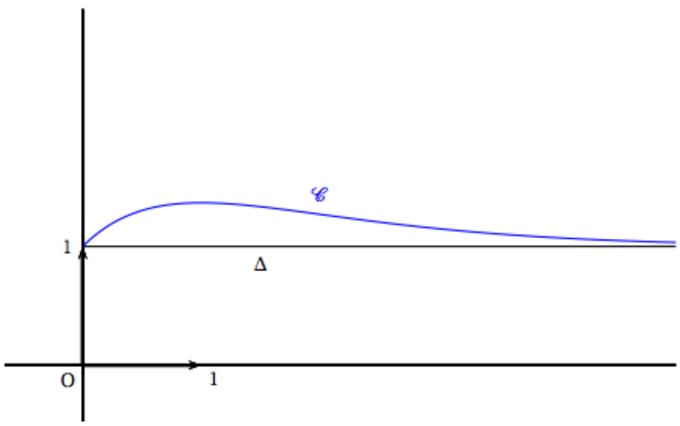
5) Soit M un point distinct de B et M' son image.
a/ Exprimer la distance OM' en fonction des distances AM et BM.
b/ Montrer que si le point M décrit la droite Δ, alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

6) Montrer que si le point M décrit la droite (AB) privée du point B alors le point M' appartient à une droite que l'on précisera.

Exercice 2 *4 points*

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=1+xe^{-x}$.

Sa courbe représentative Cf dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ et la droite Δ d'équation $y=1$ sont tracées ci-dessous.



Partie A

1) , Justifier les propriétés suivantes constatées sur la représentation graphique.
a/ Pour des valeurs de x suffisamment grandes, la courbe Cf peut être aussi proche de Δ que l'on veut.
b/ la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

2) Soit t un nombre réel positif. On considère l'intégrale $\int_0^t f(x)dx$.
Interpréter graphiquement cette intégrale

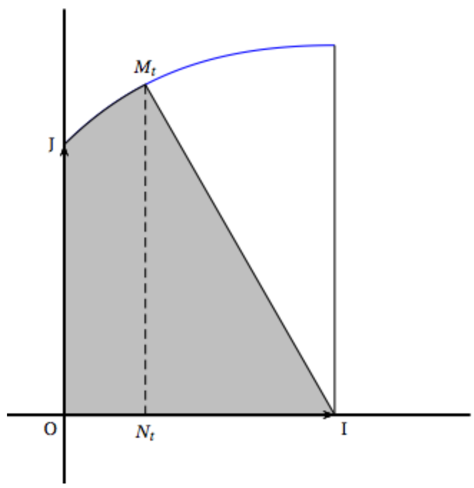
Partie B

On admet que $\int_0^1 f(x)dx = t - te^{-t} - e^{-t} + 1$

On note I le point de coordonnées $(1;0)$ et J le point de coordonnées $(0;1)$. Pour tout nombre réel a de l'intervalle $[0;1]$, M_t désigne le point de la courbe Cf d'abscisse t et N_t le point de coordonnées $(t;0)$.

On appelle D_t le domaine du plan délimité par la droite (IM_t), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe Cf.

Ce domaine est représenté par la zone grisée du graphique ci-joint. Soit $A(t)$ la mesure de son aire exprimée en unités d'aire.



1) Interpréter graphiquement $A(0)$ et donner sa valeur exacte.

2) Interpréter graphiquement $A(1)$ et donner sa valeur exacte.

3) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0;1]$, $A(t) = \frac{3}{2} + \frac{t}{2} - \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1\right)e^{-t}$

4) Existe-t-il un unique nombre réel α de l'intervalle $[0;1]$ tel que $A(\alpha) = \frac{1}{2} \times A(1)$? Justifier la réponse.

Exercice 3 — 3 points

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = e^x$.

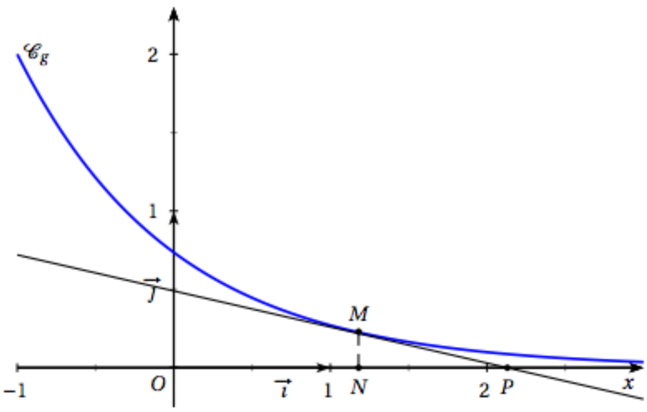
On appelle Cf la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Soit a un nombre réel. Démontrer que la tangente à la courbe Cf au point M d'abscisse a coupe l'axe des abscisses au point P d'abscisse $a-1$.

2) Soit N le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Démontrer que $\overrightarrow{NP}=-\vec{i}$.

Partie B

Soit g une fonction dérivable sur l'ensemble des nombres réels telle que $g'(x)\neq 0$ pour tout nombre réel x. On appelle Cg la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
Soit a un nombre réel. On considère le point M de la courbe Cg d'abscisse a et le point N projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses.
Le graphique ci-dessous illustre la situation de la partie B.



1) Démontrer que le point P a pour coordonnées $\left(a-\dfrac{g(a)}{g'(a)}\,;0\right)$.

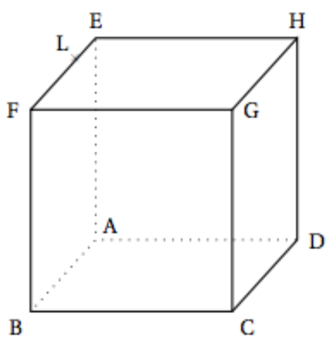
2) Existe-t-il une fonction g vérifiant $g(0)=2$ et $\overrightarrow{NP}=\vec{i}$?

Exercice 4 — 3 points

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Proposition 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

2) Proposition 2 :
on considère la fonction f définie sur l'intervalle $\left[2\,;5\right]$ et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2		3		4		5
Variations de f	3						2
		↘			1	↗	
			0	↗			

L'intégrale $\int_2^5 f(x)dx$ est comprise entre 1,5 et 2

3) Proposition 3 :
On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes et (E) l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E): z^2+2az+a^2+1$$

où a désigne un nombre réel quelconque.
Pour toute valeur de a, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E) ne sont pas réelles et leurs modules sont égaux à $\sqrt{1+a^2}$.

Exercice 5 *5 points*

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles.
Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20% des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.
On note u_0 le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.
pour tout entier naturel n non nul, u_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaine de milliers, au bout de la n-ième année.
Ainsi on a : $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=0{,}8u_n+c$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c=1$.

1) Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (u_n).

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n=5-4\times 0{,}8^n$.

3) Vérifier les deux conjectures établies à la question 1) en justifiant votre réponse. Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers $100\,000$. On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif. On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel n, $v_n=u_n-5c$.

1) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) En déduire une expression du terme général de la suite (v_n) en fonction de n.

3) Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur réalise son objectif.