

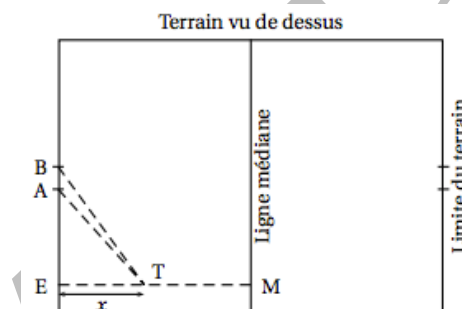
FICHE 1 *~ Fonctions trigonométriques*

Exercice 1

Lors d'un match de rugby, un joueur doit transformer un essai qui a été marqué au point E (voir figure ci-contre) situé à l'extérieur du segment $[AB]$.

La transformation consiste à taper le ballon par un coup de pied depuis un point T que le joueur a le droit de choisir n'importe où sur le segment $[EM]$ perpendiculaire à la droite (AB) sauf en E .

La transformation est réussie si le ballon passe entre les poteaux repérés par les points A et B sur la figure.



Pour maximiser des chances de réussite, le joueur tente de déterminer la position du point T qui rend l'angle $\widehat{ATB}$ le plus grand possible.

Le but de cet exercice est donc de rechercher s'il existe une position du point T sur le segment $[EM]$ pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximum et, si c'est le cas, de déterminer une valeur approchée de cet angle.

Dans la suite, on note x la longueur ET qu'on cherche à déterminer.

Les dimensions du terrain sont les suivantes : $EM = 50m$, $EA = 25m$, $AB = 5,6m$.

On note α la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETA}$, β la mesure en radian de l'angle $\widehat{ETB}$ et γ la mesure en radian de l'angle $\widehat{ATB}$.

- 1) En utilisant les triangles ETA et ETB ainsi que les longueurs fournies, exprimer $\tan \alpha$ et $\tan \beta$ en fonction de x .

La fonction tangente est définie sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

- 2) Montrer que la fonction $\tan$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

- 3) L'angle $\widehat{ATB}$ admet une mesure γ appartenant à l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, résultat admis ici, que l'on peut observer sur la figure. On admet que, pour tous réels a et b de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Montrer que $\tan \gamma = \frac{5,6x}{x^2 + 765}$.

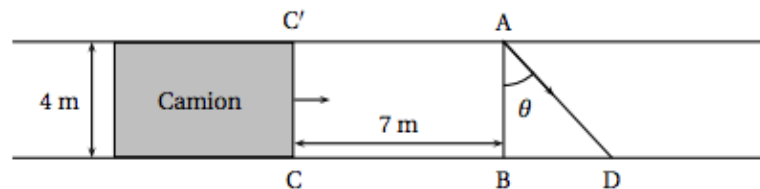
- 4) L'angle $\widehat{ATB}$ est maximum lorsque sa mesure γ est maximale. Montrer que cela correspond à un minimum sur l'intervalle $]0; 50]$ de la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{765}{x}$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle l'angle $\widehat{ATB}$ est maximal et déterminer cette valeur de x au mètre près ainsi qu'une mesure de l'angle $\widehat{ATB}$ à 0,01 degré près.

Exercice 2

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à ... 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment $[CC']$ sur le schéma ci-dessous. Le lapin part du point A en direction de D . Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (en radians).



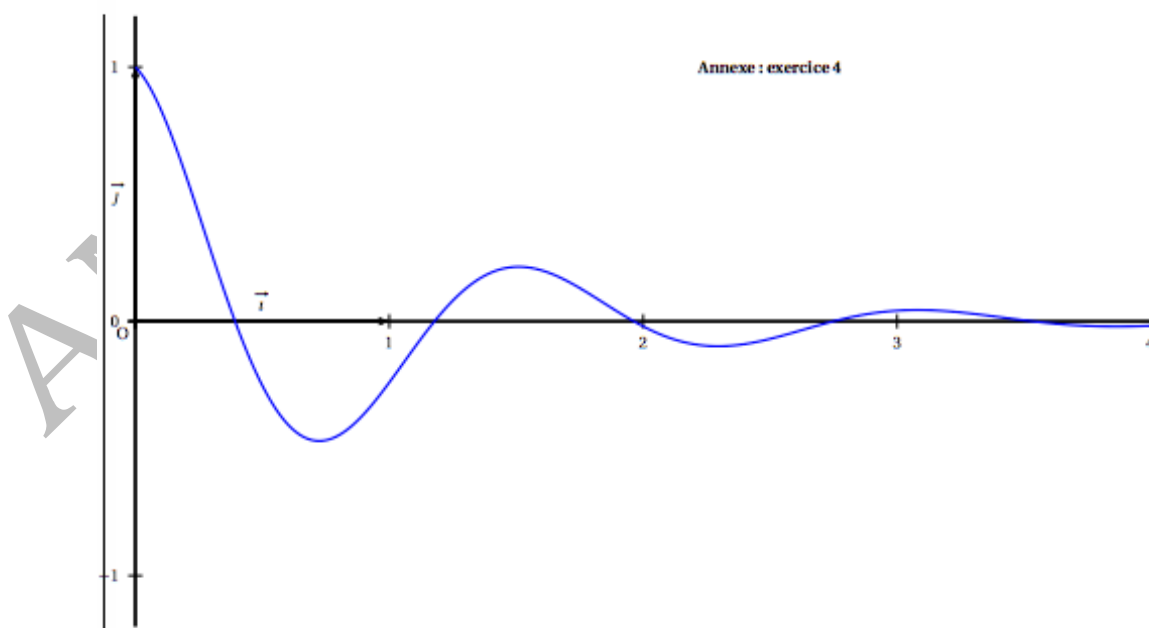
- 1) Déterminer les distances AD et CD en fonction de θ et les temps t_1 et t_2 mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD .
- 2) On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2 \tan \theta - \frac{4}{\cos \theta}$.
Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
- 3) Conclure.

Rappel : la fonction $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée $x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x}$.

Exercice 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée ci-dessous :



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = e^{-x}$ et on nomme C_g sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a/ Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$-e^{-x} \leq f(x) \leq e^{-x}$$

b/ En déduire la limite de f en $+\infty$.

- 2) Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C_g .

- 3) On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a/ Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b/ En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

- 4) a/ Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4\sin(4x)]$$

b/ En déduire que les courbes Γ et C_g ont même tangente en chacun de leurs points communs.

- 5) Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$ tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$.

Compléter le graphique donné en annexe en y traçant $\mathcal{T}$ et C_g .

Exercice 4

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos t \, dt \quad \text{et} \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin t \, dt$$

- 1) a/ Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b/ Étudier les variations de la suite (x_n) .

c/ Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

- 2) a/ Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b/ En déduire la limite de la suite (x_n) .

- 3) a/ À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul,

$$x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1).$$

b/ En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

- 4) On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$