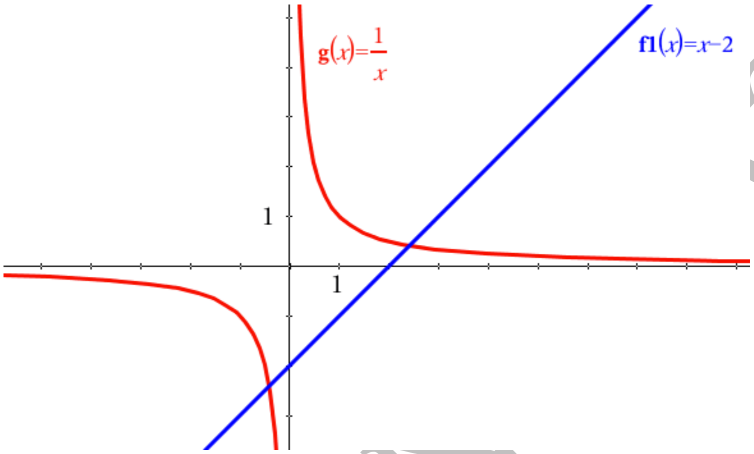
TERMINALE S / continuité - dérivation

Exercice 1

Soit l'équation (E) : $\frac{1}{x} = x - 2$ où $x \in]0\,;+\infty[$.

1) Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole et le droite d'équation $y = x - 2$.
Au vu du graphique, combien l'équation (E) admet-elle de solutions dans $]0\,;+\infty[$?



2) Un deuxième élève considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2 - \frac{1}{x}$

a/ Dresser le tableau de variations de g sur $]0\,;+\infty[$.

b/ En déduire que l'équation (E) admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $[2\,;3]$.

Donner à l'aide de la calculatrice, un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

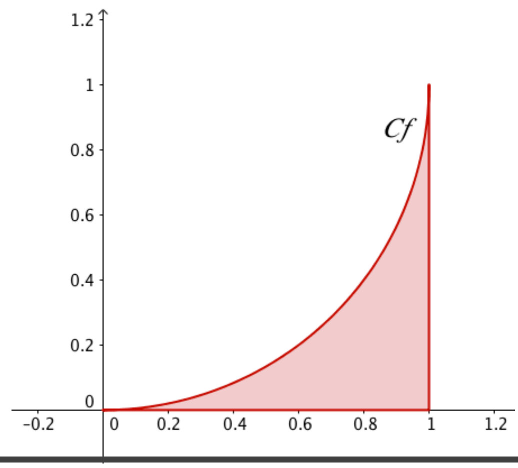
3) Un troisième élève affirme qu'il peut résoudre algébriquement l'équation (E). Justifier qu'il a raison.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par : $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

On note Cf la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ (unité graphique 1cm)

Partie A



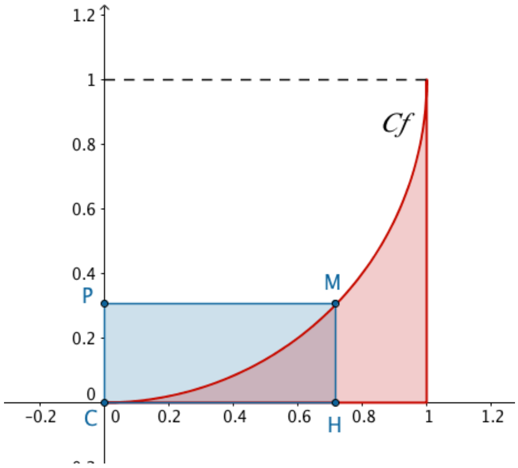
1) Montrer que : un point $M(x\,;y)$ appartient à Cf si et seulement si

$$x \geq 0\,;\, y \geq 0 \text{ et } x^2 + (y-1)^2 = 1$$

2) En déduire que Cf est un quart de cercle (préciser son centre et son rayon).

3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre Cf, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 1$.

Partie B



Pour tout réel x de $[0;1]$, on considère le point M de Cf d'abscisse x.
Le point H est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses et le point P est tel que $OHMP$ est un rectangle.

On se propose de chercher les valeurs de x pour que l'aire du rectangle $OHMP$ soit égale à $\mathcal{A}$.
On appelle $A(x)$ l'aire du rectangle $OHMP$, en cm².

1) Montrer que le problème revient à résoudre sur $[0;1]$, l'équation :

$$x^2\left(1-x^2\right)=\left(x-1+\frac{\pi}{4}\right)^2$$

2) Soit la fonction g définie sur $[0;1]$ par : $g(x)=-x^4+\left(2-\frac{\pi}{2}\right)x+\left(1-\frac{\pi}{4}\right)^2$.

a/ Étudier les variations de la fonction dérivée g' sur l'intervalle $[0;1]$.
En déduire que l'équation $g'(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;1]$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

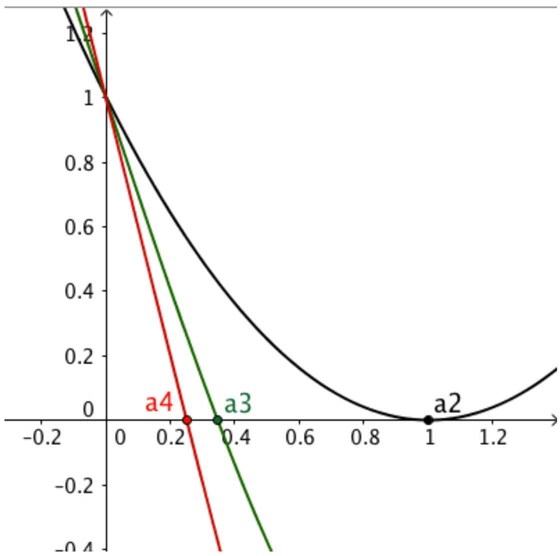
b/ En déduire le tableau de variations de g sur $[0;1]$.

c/ Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution β sur $[0;1]$. Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

3) Conclure.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n\geq 2$, on considère la fonction f_n définie sur $[0;1]$ par : $f_n(x)=x^n-nx+1$ et de courbe représentative C_n.



1) Après avoir conjecturée le résultat, étudier les positions relatives des courbes C_n et C_{n+1}, pour tout entier $n\geq 2$.

2) Démontrer que, pour tout entier $n\geq 2$, l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution a_n sur $[0;1]$.

3) La suite (a_n) est-elle monotone ? Converge-t-elle ?

On admettra pour cette dernière question que toute suite décroissante et minorée converge.