Fiche d'exercices n°2 : corrigé

Exercice 1

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.
D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y et réciproquement.
De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X, et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1er janvier de l'année $2014+n$, exprimée en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1er janvier de l'année 2014, l'agence X possède 50 millions d'euros et l'agence Y 10 millions d'euros. L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1}=AU_n+B \quad \text{où} \quad A=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1) Le coefficient 0,6 de la matrice A indique que 60% des fonds de l'agence X restent dans l'agence X d'une année sur l'autre.
Le coefficient 3 de la matrice B indique que le siège transfère chaque année 3 millions d'euros à l'agence Y.

2) D'après l'énoncé, on a : $U_0=\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}$.

$$U_1=A\times U_0+B=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0,6\times 50+0,15\times 10 \\ 0,2\times 50+0,4\times 10 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 31,5 \\ 14 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 32,5 \\ 17 \end{pmatrix}$$

En 2015, l'agence X détient 32,5 millions d'euros, l'agence Y détient 15 millions d'euros.

3) On note $D=\begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q=\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.

a / $P\times D\times Q=\begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}=A$

b / $Q\times P=\begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

Notons a_{12} le coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne de ce produit :

$a_{12}=0,25\times 3+(-0,375)\times 2=0$.

Dans la suite, on admet que $Q\times P=I$.

On admettra dans la suite de cet exercice, que pour tout entier naturel non nul n, $A^n=P\times D^n\times Q$.

MATHS - MAINGUY

4) On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.

a / Démontrons que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

$$AV_n = A\left(U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}\right) = AU_n - \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = AUn - \begin{pmatrix} 0,6\times 5 + 0,15 \times 20/3 \\ 0,2\times 5 + 0,4 \times 20/3 \end{pmatrix}$$

$$= AU_n - \begin{pmatrix} 4 \\ 11/3 \end{pmatrix} = AU_n + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = U_{n+1} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = V_{n+1}$$

b / $V_0 = U_0 - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 10/3 \end{pmatrix}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.

5) Soit n un entier naturel. On admet que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 0,25\times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375\left(0,3^n + 0,7^n\right) \\ 0,5\left(0,3^n + 0,7^n\right) & 0,75\times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}$$

a / Coefficient de la première ligne de la matrice V_n :

$$\left(0,25\times 0,3^n + 0,75\times 0,7^n\right)\times 45 + 0,375 \times \left(-0,3^n + 0,7^n\right) \times \frac{10}{3}$$
$$= 11,25 \times 0,3^n + 33,75 \times 0,7^n + \left(-1,25\right)\times 0,3^n + 1,25 \times 0,7^n$$
$$= \left(11,25 - 1,25\right)\times 0,3^n + \left(33,75 + 1,25\right)\times 0,7^n$$
$$= 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n$$

b / Expression de x_n en fonction de n :

$V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_n = V_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$ D'où : $x_n = 10 \times 0,3^n + 35 \times 0,7^n + 5$

c / $\left(0,3\right)^n$ et $\left(0,7\right)^n$ sont de la forme q^n avec $0 < q < 1$.

On en déduit que lorque n tend vers $+\infty$,

$0,3^n \to 0$ *alors* $10 \times 0,3^n \to 0$
$0,7^n \to 0$ *alors* $35 \times 0,7^n \to 0$
$5 \to 5$
} *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 5$

Ainsi, après un grand nombre d'années, les fonds de l'agence X se stabiliseront à une somme proche de 5 millions d'euros.

Exercice 2

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume as le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

MATHS - MAINGUY

1) On a immédiatement : $p_1 = 0,4$ et $q_1 = 0,6$.

2) On utilise le tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n).

	A	B	C	D
1	n	p_n	q_n	
2	0	0	1	
3	1			
4	2			
5	3			

• Formule en $B3$: $\boxed{=0,9*B2+0,4*C2}$; • Formule en $C3$: $\boxed{=0,1*B2+0,6*C2}$

3) On donne : $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

On admet que $X_{n+1} = M \times X_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n \times X_0$.

On définit les matrices A et B par : $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

a / Montrons que $M = A + 0,5B$:

$$A + 0,5B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5\begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & -0,4 \\ -0,1 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix} = M$$

b / Vérifions que $A^2 = A$ et que $A \times B = B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 & 0,8^2 + 0,8 \times 0,2 \\ 0,2 \times 0,8 + 0,2^2 & 0,2 \times 0,8 + 0,2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} = A$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \times 0,2 + 0,8 \times (-0,2) & 0,8 \times (-0,8) + 0,8 \times 0,8 \\ 0,2 \times (-0,2) + 0,2 \times 0,2 & 0,2 \times (-0,8) + 0,2 \times 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On démontre de mainère analogue que $B \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

On admet dans la suite que pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c / Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

Initialisation :

$$A + 0,5^0 \times B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = M^0$$

Hérédité : on suppose la pté vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang suivant $n+1$:

$$M^{n+1} = (A + 0,5 \times B)(A + 0,5^n \times B) = \underbrace{A^2}_{A} + 0,5^n \times \underbrace{AB}_{O_2} + 0,5^n \times \underbrace{BA}_{O_2} + 0,5^{n+1} \times \underbrace{B^2}_{B} = A + 0,5^{n+1} \times B$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = A + 0,5^n \times B$.

MATHS - MAINGUY

d / Montrons que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

On sait que :

$$X_n = M^n \times X_0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix} + 0,5^n \times \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,8 + 0,5^n \times 0,2 & 0,8 + 0,5^n \times (-0,8) \\ 0,2 + 0,5^n \times (-0,2) & 0,2 + 0,5^n \times 0,8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit alors que : $p_n = (0,8 + 0,5^n \times 0,2) \times 0 + (0,8 + 0,5^n \times (-0,8)) \times 1 = 0,8 + 0,5^n \times (-0,8)$

e / Déterminons $\lim\limits_{+\infty} p_n$:

$0,5^n$ est de la forme q^n avec $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{+\infty} (0,5^n) = 0$.

Ainsi, quand $n \to +\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} 0,5^n \to 0 \\ 0,5^n \times (-0,8) \to 0 \\ 0,8 \to 0,8 \end{array}\right\} \textit{par somme}, \quad \lim\limits_{+\infty} p_n = 0,8$$

On peut donc estimer que le fumeur a 80% de chance d'arrêter de fumer.

MATHS - MAINGUY