Préparation bac 2018 (4)/ spécialité maths

Arithmétique

Exercice 1

On définit les suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + v_n$.
On admettra que les termes de ces suites sont des entiers naturels non nuls.

Partie A : conjectures

Flore a calculé les premiers termes des suites à l'aide du tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous :

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	3
4	2	19	13
5	3	77	51
6	4	307	205

1) Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir en copie vers le bas les termes des suites ?
2) Soit n un entier naturel. Conjecturer la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$. Aucune justification n'est demandée.
3) Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13, Flore obtient les résultats suivants :

12	10	1 258 291	838 861
13	Il	5 033 165	3 355 443
14	12	20 132 659	13 421 773
15	13	80 530 637	53 687 091

Elle émet la conjecture : « la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge ». Qu'en penser ?

Partie B : étude arithmétique

1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $2u_n - 3v_n = (-1)^{n+1}$.
2) Soit n un entier naturel.
Déduire de la question précédente la valeur de PGCD$(u_n\ ;\ v_n)$.

Partie C : étude matricielle

Pour tout entier naturel n, on définit :

- la matrice $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.
- les matrices carrées $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q_n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 3\times 2^{2n} \\ (-1)^{n+1} & 2^{2n+1} \end{pmatrix}$

1) a/ Montrer que la matrice $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est l'inverse de P.
b/ On admet que, pour tout entier naturel n, on a $X_n = Q_n P^{-1} X_0$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\begin{cases} u_n = \frac{(-1)^{n+1} + 3\times 2^{2n+1}}{5} \\ v_n = \frac{(-1)^n + 2^{2n+2}}{5} \end{cases}$

2) a/ Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}}+3}{\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}}+2}$

b/ En déduire la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Exercice 2

1) a/ Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

b/ Appliquer l'algorithme d'Euclide à 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2) Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que : $\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}$.

Que valent a_1 et b_1 ?

D'après les calculs de la question 1) a/ donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

a/ Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

b/ Démontrer que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

c/ Démontrer que si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.