Fiche d'exercices n°5

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 2u_n + 6$$

1) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 9\times 2^n - 6$.

2) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3) On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

   Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4) a/ Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

   b/ En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.
   c/ En déduire pour tout entier naturel $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1}.

5) a/ Vérifier que $2^4 \equiv 1\ [5]$.

   b/ En déduire que si n est un entier de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.
   c/ Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ?

Exercice 2

1) Soit p un entier relatif donné. On s'intéresse dans cette question à l'équation (E_p) :
$$3x + 4y = p \quad \text{où } (x\,;y) \text{ couple d'entiers relatifs.}$$

   a/ Vérifier que le couple $(-p\,;p)$ est une solution particulière de l'équation.
   b/ Démontrer que l'ensemble des solutions de (E_p) est l'ensemble des couples de la forme :
   $(-p + 4k\,; p - 3k)$ où k est un entier relatif.

Dans la suite de l'exercice , l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath}\,;\,\vec{k})$.
On considère le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne : $6x + 8y - z = 0$

2) Soit M_0 un point de coordonnées $(x_0\,;\ y_0\,;\ z_0)$ qui appartient au plan $(\mathcal{P})$ et dont les trois coordonnées sont des entiers relatifs.

   a/ Démontrer que z_0 est pair.
   b/ On pose $z_0 = 2p$ où p est un entier relatif. Prouver que le couple $(x_0\,;\ y_\circ)$ est solution de (E_p).
   c/ En utilisant la question 1), déterminer l'ensemble des points du plan $(\mathcal{P})$ à coordonnées entières.

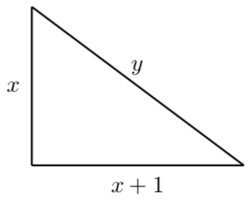
3) À tout point M de coordonnées $(x\,;y\,;z)$, on associe le point M' de coordonnées $(x'; y'; z')$ avec :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & 75 & 180 \\ 56 & 41 & -144 \\ 28 & -30 & 29 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   a/ Démontrer que $6x' + 8y' - z' = 101(6x - 8y - Z)$.
   b/ En déduire que si le point M appartient au plan $(\mathcal{P})$, alors le point M' appartient aussi au plan $(\mathcal{P})$.
   c/ Soit Δ la droite perpendiculaire à $(\mathcal{P})$ passant par O. Montrer que si M appartient à Δ alors M' aussi.

Exercice 3

On appelle « triangle rectangle presque isocèle », en abrégé TRPI, un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit ont pour longueurs x et $x+1$ et dont l'hypoténuse a pour longueur y, où x et y sont des entiers naturels.

Ainsi un TRPI est un triangle rectangle sont les longueurs des côtés de l'angle droit sont des nombres entiers consécutifs et dont la longueur de l'hypoténuse est un nombre entier.



Si le triangle de côtés x, $x+1$ et y, où y est la longueur de l'hypoténuse, est un TRPI, on dira que le couple $(x\ ;\ y)$ définit un TRPI.

Partie A

1) Démontrer que le couple d'entiers naturels $(x\ ; y)$ définit un TRPI si et seulement si, on a :
$$y^2 = 2x^2 + 2x + 1$$

2) Démontrer que le TRPI ayant les plus petits côtés non nuls est défini par le couple (3 ; 5)

3) a/ Soit n un entier naturel. Montrer que si n^2 est impair alors n est impair.

   b/ Montrer que dans un couple d'entiers $(x\ ; y)$ définissant un TRPI, le nombre y est nécessairement impair.

4) Montrer que si le couple d'entiers naturels $(x\ ; y)$ définit un TRPI, alors x et y sont premiers entre eux.

Partie B

On note A la matrice carrée : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, et B la matrice colonne : $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soit x et y deux entiers naturels, on définit les entiers naturels x' et y' par la relation :
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

1) Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

2) a/ Montrer que : $y'^2 - 2x'^{(x'+1)} = y^2 - 2x(x+1)$.

   b/ En déduire que si le couple $(x\ ; y)$ définit un TRPI alors le couple $(x'; y')$ définit également un TRPI.

3) On considère les suites (x_n) et (y_n) d'entiers naturels définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 5$ et pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + B$$
   Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\ ;\ y_n)$ définit un TRPI.

4) Déterminer par la méthode de votre choix que vous préciserez, TRPI dont les longueurs des côtés sont supérieures à 2017.

Exercice 4

L'objet du problème est l'étude d'une méthode de cryptage dite « chiffrement de Hill » dans un cas particulier.
Cette méthode nécessite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont les coefficients sont des nombres entiers compris entre 0 et 25 et tels que $ad - bc$ soit premier avec 26.
Cette matrice est connue seulement de l'émetteur et du destinataire.

Partie A : quelques résultats

1) On considère l'équation $(E) : 9d - 26m = 1$, où d et m désignent des entiers relatifs.

   a/ Donner une relation simple de cette équation, de sorte que d et m soient des nombres entiers compris entre 0 et 3.

   b/ Démontrer que le couple $(d\,;m)$ est solution de l'équation (E) si et seulement si :
   $$9(d-3) = 26(m-1).$$

   c/ En déduire que les solutions de l'équation (E) sont les nombres entiers relatifs de le forme :
   $$\begin{cases} d = 26k + 3 \\ m = 9k + 1 \end{cases}, \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

2) a/ Soit n un nombre entier. Démontrer que si $n = 26k - 1$, avec k entier relatif, alors n et 26 sont premiers entre eux.

   b/ En déduire que les nombres $9d - 28$, avec $d = 26k + 3$ et $k \in \mathbb{Z}$, sont premiers avec 26.

Partie B : cryptage et décryptage

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$. On utilisera le tableau suivant pour la correspondance entre les lettres et les nombres.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Méthode de cryptage (pour un mot comportant un nombre pair de lettres)	**Exemple : avec le mot MATH**	
1. On regroupe les lettres par paires.	MA	TH
2. On remplace les lettres par les valeurs associées à l'aide du tableau précédent, et on place les couples de nombres obtenus dans des matrices colonne.	$C_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix}$	$C_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. On multiplie les matrices colonne par la gauche par la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$	$AC_1 = \begin{pmatrix} 108 \\ 84 \end{pmatrix}$	$AC_2 = \begin{pmatrix} 199 \\ 154 \end{pmatrix}$
4. On remplace chaque coefficient des matrices colonne obtenues par leur reste dans la division euclidienne par 26.	$108 = 4 \times 26 + 4$ $84 = 3 \times 26 + 6$ On obtient : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 17 \\ 24 \end{pmatrix}$
5. On utilise le tableau de correspondance entre lettres et nombres pour obtenir le mot crypté.	EG	RY

1) En cryptant par cette méthode le mot « PION », on obtient « LZWH ». En détaillant les étapes pour le mot « ES », crypter le mot « ESPION ».

Méthode de décryptage

Notation : lorsqu'on manipule des matrices de nombres entiers relatifs, on peut utiliser la notation « ≡ » pour parler de congruence coefficient par coefficient. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix}108\\84\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \text{ module 26 car } 108 \equiv 4 \text{ et } 84 \equiv 6 \text{ module 26.}$$

Soient a , b , x , y , x', y' des nombres entiers relatifs.

On sait que si $x \equiv x'$ module 26 et $y \equiv y'$ modulo 26 alors $ax + by \equiv ax' + by'$ module 26.

Ce résultat permet d'écrire que, si A est une matrice 2×2 et B et C sont deux matrices 2×1 , alors :

$$B \equiv C \text{ module 26 implique } AB \equiv AC \text{ modulo 26.}$$

2) a/ Établir que la matrice A est inversible et déterminer son inverse.

b/ Décrypter le mot XQGY.