

Fiche d'exercices n°1 : son corrigé

Exercice 1

$$284 = 1 \times 284 = 2 \times 142 = 4 \times 71.$$

Les diviseurs propres de 284 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 71 ; 142.

La somme S des diviseurs propres de 284 est : $S = 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220$

$$S = 220 = 1 \times 220 = 2 \times 110 = 4 \times 55 = 5 \times 44 = 10 \times 22 = 11 \times 20.$$

Les diviseurs propres de 220 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 44 ; 55 ; 110

La somme S' des diviseurs propres de 220 est : $S' = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284$

On observe ainsi que la somme des diviseurs propres de 284 est 220 ; la somme des diviseurs propres de 220 est 284.

Exercice 2

1) Diviseurs positifs de 30 : $30 = 1 \times 30 = 2 \times 15 = 3 \times 10 = 5 \times 6$, d'où : $S = 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 10 + 15 + 30 = 72$.

2) Diviseurs positifs de 140 : $140 = 1 \times 140 = 2 \times 70 = 4 \times 35 = 5 \times 28 = 7 \times 20 = 10 \times 14$ d'où :
 $T = 1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 10 + 14 + 20 + 28 + 35 + 70 + 140 = 336$

3) On a alors : $\frac{S}{T} = \frac{72}{336} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7} = \frac{3}{14} = \frac{30}{140}$ CQFD.

Exercice 3

► Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre $n^3 - n$ est un multiple de 6 :
 cela revient à montrer que 2 et 3 divisent $n^3 - n$.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1) \times n \times (n+1)$$

• Montrons d'abord que 2 divise $n^3 - n$:

Si n est pair alors il existe un entier k tel que $n = 2k$. On a alors : $n^3 - n = 2k(n-1)(n+1)$ d'où le résultat.

Si n est impair alors $n+1$ est pair et de manière analogue, il en résulte que $n+1$ divise $n^3 - n$.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 2 divise $n^3 - n$.

• Montrons que 3 divise $n^3 - n$:

1^{er} cas :

3 divise n alors il existe un entier k' tel que $n = 3k'$. On a alors $n^3 - n = 3k'(n-1)(n+1)$ d'où le résultat.

Sinon, si 3 ne divise pas n alors cela signifie qu'il existe un réel a tel que $n = 3a + 1$ ou $n = 3a + 2$.

2nd cas : $n = 3a + 1$ alors $n - 1 = 3a$. On a alors $n^3 - n = 3a \times n \times (n+1)$ d'où le résultat.

3^{ème} cas : $n = 3a + 2$ alors $n + 1 = 3a + 3 = 3(a+1)$. On a alors : $n^3 - n = 3(a+1) \times (n-1) \times n$ d'où le résultat.

Il en résulte que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 3 divise $n^3 - n$.

conclusion : 2 et 3 divisent $n^3 - n$. D'où 6 divise $n^3 - n$.

ARITHMÉTIQUE

Exercice 4

► On considère deux entiers a et b . Démontrons l'équivalence : $7|2a+5b \Leftrightarrow 7|5a+2b$

• Démontrons d'abord que $7|2a+5b \Rightarrow 7|5a+2b$:

On sait que $\left. \begin{array}{l} 7|2a+5b \\ 7|7(a+b) \end{array} \right\} \text{ alors } 7|7(a+b) - (2a+5b) \text{ cad } 7|5a+2b$

• Réciproquement :

on sait que $\left. \begin{array}{l} 7|5a+2b \\ 7|7(a+b) \end{array} \right\} \text{ alors } 7|7(a+b) - (5a+2b) \text{ cad } 7|2a+5b$

L'équivalence est donc vérifiée.

Exercice 5

► Déterminons les entiers relatifs n tels que $n+8$ soit divisible par n :

Supposons donc $n|n+8$; on sait aussi que $n|n$. On en déduit que $n|n+8-n$ cad $n|8$

Or on sait que les diviseurs de 8 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; déduisons-en alors les valeurs possible de n :

- pour $n=1$, $n+8=9$. Or $1|9$ donc $n=1$ solution ;
- pour $n=2$, $n+8=10$. or $2|10$ donc $n=2$ solution ;
- pour $n=4$, $n+8=12$. Or $4|12$ donc $n=4$ solution ;
- pour $n=8$, $n+8=16$. Or $8|16$ donc $n=8$ solution.

conclusion : les valeurs de n sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8 et leurs opposés.

Remarque : autre méthode possible, démontrer que $n|8 \Rightarrow n|n+8$

Très facile, en effet : $\left. \begin{array}{l} n|8 \\ n|n \end{array} \right\} \text{ alors } n|n+8$

Il en résulte que $n|n+8 \Leftrightarrow n|8$ et les valeurs de n sont les diviseurs de 8.

Exercice 6

On considère un entier naturel n .

1) Montrons que $13|7n+4 \Rightarrow 13|n-5$:

• On a d'une part : $\left. \begin{array}{l} 13|13 \\ 13|7n+4 \end{array} \right\} \text{ alors } 13|7n+4-13 \text{ cad } 13|7n-9$

• On a aussi : $\left. \begin{array}{l} 13|13n \\ 13|7n+4 \end{array} \right\} \text{ alors } 13|13n-(7n+4) \text{ cad } 13|6n-4$

ARITHMÉTIQUE

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 7n-9 \\ 13 \mid 6n-4 \end{array} \right\} \text{alors } 13 \mid 7n-9-(6n-4) \text{ cad } 13 \mid n-5$$

2) La réciproque est-elle vraie ?

$$\text{On a d'abord } 13 \mid n-5 \Rightarrow 13 \mid 6(n-5) \text{ cad } 13 \mid 6n-30$$

On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} 13 \mid 13n \\ 13 \mid 6n-30 \\ 13 \mid 26 \end{array} \right\} \text{alors } 13 \mid 13n-(6n-30)-26 \text{ cad } 13 \mid 7n+4. \quad \text{La réciproque est vérifiée.}$$

Exercice 7

On considère les entiers naturels a et b tels que : $a \mid 5b+31$ et $a \mid 3b+12$.

1) Montrons que $a \mid 33$:

$$a \mid 5b+31 \Rightarrow a \mid 3(5b+31) \text{ cad } a \mid 15b+93 ; \quad a \mid 3b+12 \Rightarrow a \mid 5(3b+12) \text{ cad } a \mid 15b+60$$

$$\text{On a alors : } \left. \begin{array}{l} a \mid 15b+93 \\ a \mid 15b+60 \end{array} \right\} \text{alors } a \mid 15b+93-(15b+60) \text{ cad } a \mid 33 \text{ CQFD}$$

2) On sait que : $33 = 1 \times 33 = 3 \times 11$. Ainsi les valeurs possibles de a sont : 1 ; 3 ; 11 ; 33.