Fiche n°2 ∾ suites numériques (partie 2)

Exercice 1

Entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2014, une clinique enregistre 1200 accouchements.
Depuis quelques années, le nombre annuel d'accouchements a augmenté en moyenne de 3% par an.
L'objectif du directeur de la clinique est d'atteindre les 8000 accouchements réalisés dans la clinique d'ici fin 2020, en supposant que ce pourcentage d'augmentation moyen reste constant.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n le nombre annuel d'accouchements dans cette clinique pour l'année $2014+n$. Ainsi, u_0 est le nombre d'accouchements durant l'année 2014, et $u_0=1200$.

1) Nombre d'accouchements qui ont lieu dans cette clinique en 2015 :
$u_1=1200+0{,}03\times1200=1236$. La clinique a donc effectué 1236 accouchements en 2015.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $u_{n+1}=u_n+0{,}03u_n=u_n\left(1+0{,}03\right)=1{,}03u_n$.
On reconnaît la formule de récurrence d'une suite géométrique de 1er terme $u_0=1200$ et de raison $q=1{,}03$.

3) Pour tout entier naturel n, on a : $u_n=u_0\times q^n=1200\times1{,}03^n$.

4) $2017=2014+3$, il s'agit donc de calculer u_3.
$u_3=u_0\times q^3=1200\times1{,}03^3\approx1311$.
En 2017, il y aura environ 1311 accouchements réalisés dans cette clinique.

5) a/ $2020=2014+6$. Il s'agit donc ce calculer $S=u_0+u_1+\ldots+u_6$.

$$S=u_0\times\frac{1-q^7}{1-q}=1200\times\frac{1-1{,}03^7}{1-1{,}03}=1200\times\frac{1{,}03^7-1}{1{,}03-1}=1200\times\frac{1{,}03^7-1}{0{,}03}=1200\times100\times\frac{1{,}03^7-1}{3}\approx9195$$

9195 accouchements qui auront lieu dans cette clinique entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2020.

b/ Le directeur de la clinique a donc atteint son objectif puisque plus de 8000 accouchements ont été réalisés dans cette clinique entre le 1er janvier 2014 et le 31 décembre 2020.

Exercice 2

À partir du 1er janvier 2016, Alice a décidé de travailler son endurance à la course à pied. Pour cela, elle va s'entraîner régulièrement. Tous les mois, elle note ses performances afin d'évaluer ses progrès.

1) Alice suit d'abord l'évolution des distances parcourues. Au mois de janvier 2016, la distance qu'elle est capable de courir en une fois est égale à 10 km et cette distance courue en une fois augmente tous les mois de 6%.
Pour tout entier naturel n, on note d_n la distance, en kilomètres, qu'Alice est capable de courir en une fois le n-ième mois après le mois de janvier 2016. Ainsi on considère que $d_0=10$.

a/ $d_1=10+0{,}06\times10=10{,}6$; après un mois Alice est capable de courir une fois la distance de $10{,}6$ km.

b/ On a : $d_{n+1}=d_n+0{,}06d_n=d_n\left(1+0{,}06\right)=1{,}06d_n$; on reconnaît la formule de récurrence d'une suite géométrique de raison $q=1{,}06$ et de 1er terme $d_0=10$.

On a alors : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $d_n=d_0\times q^n$ cad $d_n=10\times1{,}06^n$.

c/ La distance qu'est capable de courir Alice au mois de septembre 2016 correspond à d_8 :

On a : $d_8 = 10 \times 1{,}06^8 \approx 15{,}9$ km à $0{,}1$ km près.

d/ Déterminons la valeur de n tel que $d_n \geq 25$ cad :

$$10 \times 1{,}06^n \geq 25 \Leftrightarrow 1{,}06^n \geq \frac{25}{10} \Leftrightarrow 1{,}06^n \geq 2{,}5 \Leftrightarrow n \geq 16.$$

Alice sera capable de courir en une fois 25 km au bout de 16 mois.

2) À partir du mois de septembre 2016, Alice s'intéresse au temps mis pour courir les 10 premiers kilomètres de sa course à pied. Son temps pour les 10 premiers kilomètres, au mois de septembre 2016, est de 60 minutes. On admet que ce temps diminue tous les mois de 2%, et cela jusqu'en décembre 2016. Alice utilise l'algorithme suivant :

Variables : N entier naturel, t réel
Initialisation :
  Affecter à N la valeur 0
  Affecter à t la valeur 60
Traitement :
  Tant que $t > 50$
    Affecter à N la valeur $N+1$
    Affecter à t la valeur $0{,}98 \times t$.
  Fin Tant que
Sortie : Afficher N, Afficher t

a/ Cet algorithme permet à Alice de déterminer le nombre de mois nécessaires pour que son temps de course du 10 km soit inférieur à 50 minutes et le temps exact qu'elle mettra pour cette course.

b/ Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs successives prises par les variables N et t lors du déroulement de l'algorithme, jusqu'à son arrêt.

Valeur de N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur de t (à 10^{-2} près)	60	58,8	57,6	56,5	55,3	54,2	53,2	52,1	51	50	49

c/ On obtient en sortie : $N \approx 10$, $t \approx 49$. Ainsi Alice effectuera sa course en moins de 50 minutes pour la première fois au bout de 10 mois (donc en juillet 2017) et elle mettra environ 49 minutes pour effectuer les 10 km.

d/ Alice a pour objectif de se qualifier pour un championnat de semi-marathon. L'épreuve de qualification est aussi un semi-marathon, d'une longueur de 21 km, qui se déroulera au mois de novembre 2018.
Cette épreuve se court à 82% de la vitesse qu'elle peut avoir sur les 10 premiers kilomètres de course et le temps pour se qualifier doit être inférieur à 2 heures.
On justifiera la réponse.

• Notons t_n le temps mis par Alice pour parcourir 10 km au bout de n mois.

On a $t_{n+1} = 0{,}98 \times t_n$ et donc (t_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}98$ et de 1er terme $t_0 = 60$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = t_0 \times q^n = 60 \times 0{,}98^n$

• Le temps que mettra Alice pour parcourir 10 kilomètres au nois de novembre 2018 est t_{29} :

$$t_{29} = 60 \times 0{,}98^{29} \approx 33{,}4 \text{ min.}$$

Sa vitesse de course sur 10 km est : $v = \frac{d}{t} \approx \frac{10}{33{,}4} \approx 0{,}3$ km/min.

• Sa vitesse sur 21 km est alors : $v' = 0{,}82 \times 0{,}3 \approx 0{,}216$ km/min et le temps que mettra Alice pour parcourir ces 21 km sera : $t' = \frac{21}{v'} \approx \frac{21}{0{,}216} \approx 85{,}4$ soit un peu moins de 1h26 min, donc moins de 2heures. Alice sera qualifiée

Exercice 3

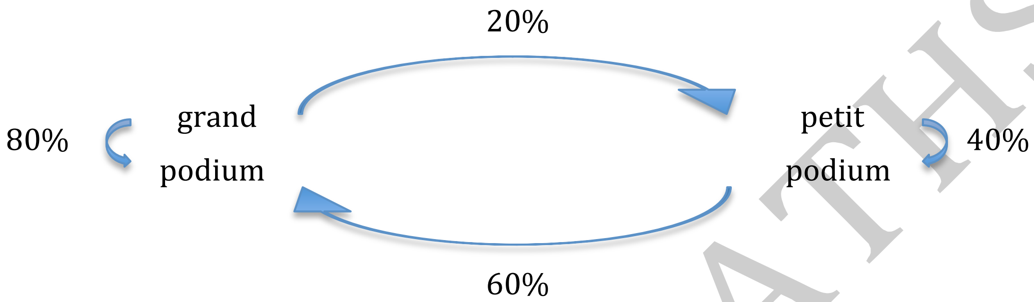
Achille est dresseur de puces et présente un excellent numéro de cirque. Il possède mille puces qu'il fait sauter en l'air en cadence entre deux podiums, un petit et un grand, placés l'un à côté de l'autre.

Il a constaté que :

• parmi les puces placées sur le grand podium, 80% retombent sur place et 20% sur le petit podium ;

• parmi les puces placées sur le petit podium, 40% retombent sur place et 60% sur le grand podium.

Il fait sauter les puces plusieurs fois de suite.



Au départ, il y a 200 puces sur le grand podium et 800 puces sur le petit podium.

On souhaite savoir si le nombre de puces sur chaque podium se stabilise au bout d'un grand nombre de sauts.

Pour tout entier naturel n, on note g_n le nombre de puces sur le grand podium et p_n le nombre de puces sur le petit podium au bout de n sauts. Ainsi, $g_0 = 200$ et $p_0 = 800$.

1) On veut calculer les 20 premiers termes des suites (g_n) et (p_n) à l'aide d'un tableur.

a/ Réalisons une feuille de calcul :

	A	B	C
=			
1	0	200	800
2	1	640.	360.
3	2	728.	272.
4	3	745.6	254.4
5	4	749.12	250.88
6	5	749.824	250.176
7	6	749.965	250.035
8	7	749.993	250.007
9	8	749.999	250.001
10	9	750.	250.
11	10	750.	250.
12	11	750.	250.

	A	B	C
=			
13	12	750.	250.
14	13	750.	250.
15	14	750.	250.
16	15	750.	250.
17	16	750.	250.
18	17	750.	250.
19	18	750.	250.
20	19	750.	250.

On a entré les formules suivantes :

• en $A1$: $\boxed{=0}$; en $B1$: $\boxed{=200}$; en $C1$: $\boxed{=800}$

• en $A2$: $\boxed{=A1+1}$; en $B2$: $\boxed{=0.8*B1+0.6*C1}$; en $C2$: $\boxed{=0.4*C1+0.2*B1}$

b/ Il semble qu'après un certain nombre de sauts, le nombre de puces se stabilise en se répartissant de la façon suivante : 750 puces sur le grand podium et 250 puces sur le petit podium.

2) On étudie maintenant les écarts entre le nombre de puces sur chaque podium et le nombre « limite » de puces sur chaque podium.
Soit alors les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = g_n - 750 \qquad \text{et} \qquad v_n = p_n - 250$$

Complétons la feuille de calcul précédente en faisant apparaître les 20 premiers termes des suites (u_n) et (v_n) (seules les premières lignes apparaissent ci-dessous)

		B	C	D	E
=					
1	0	200	800	-550	550
2	1	640.	360.	-110.	110.
3	2	728.	272.	-22.	22.
4	3	745.6	254.4	-4.4	4.4
5	4	749.12	250.88	-0.88	0.88

Les suites (u_n) et (v_n) semblent géométriques de raison $q = \frac{1}{5} = 0,2$ et de 1er termes respectifs $u_0 = -550$ et $v_0 = 550$.

3) a/ On a $g_n + p_n = 1000 \Leftrightarrow g_n = 1000 - p_n$
Ainsi, $g_{n+1} = 0,8g_n + 0,6p_n = 0,8g_n + 0,6(1000 - g_n) = 0,2g_n + 600$

On en déduit les formules explicites suivantes : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = u_0 \times q^n = -550 \times 0,2^n \quad \text{et} \quad v_n = v_0 \times q^n = 550 \times 0,2^n$$

b/ $u_{n+1} = g_{n+1} - 750 = 0,2g_n + 600 - 750 = 0,2g_n - 150 = 0,2\left(g_n - \frac{150}{0,2}\right) = 0,2(g_n - 750) = 0,2u_n$.
On reconnaît la formule de récurrence d'une suite géométrique de raison $q = 0,2$ et de 1er terme $u_0 = g_0 - 750 = 200 - 750 = -550$.

c/ On en déduit que pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n = -550 \times 0,2^n$
De plus, $u_n = g_n - 750 \Leftrightarrow g_n = u_n + 750 \Leftrightarrow g_n = -550 \times 0,2^n + 750$.

d/ Déterminons la limite g_n en $+\infty$:
$0,2^n$ est de la forme q^n avec $0 < q < 1$. Alors $\lim\limits_{+\infty} 0,2^n = 0$.
Quand $n \to +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} 0,2^n \to 0 \\ -550 \times 0,2^n \to 0 \\ -550 \times 0,2^n + 750 \to 750 \end{array}\right\} \quad d'où \quad \lim_{+\infty} g_n = 750 .$$

Ainsi sur le long terme, le nombre de puces sur le grand podium se stabilise à une valeur proche de 750 puces, le nombre de puces sur le petit podium se stabilise donc vers une valeur proche de 250 puces.

Exercice 4

Les nombres de points $1 , 5 , 12 , 22$ sont associés aux figures ci-dessous.

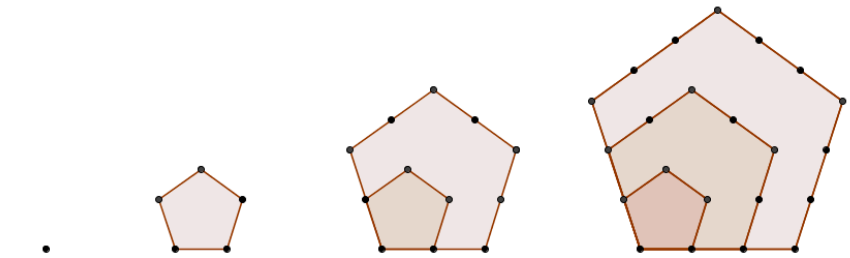


figure 1 *figure 2* *figure 3* *figure 4*

On suppose que le processus de construction se poursuit ainsi.

➡ L'objectif est de déterminer le nombre de points associés à la figure 8 puis à la figure 2011 :

Notons u_n le nombre de points associés à la figure n : on a :

$u_1 = 1 , u_2 = 5 , u_3 = 12 , u_4 = 22$ et $u_2 - u_1 = 4 , u_3 - u_2 = 7 , u_4 - u_3 = 10$

On observe que $v_n = u_{n+1} - u_n$ est une suite arithmétique de 1er terme 4 et de raison $r = 3$.

On a alors pour tout entier naturel n , $v_n = v_1 + (n-1)r = 4 + 3(n-1) = 3n + 1$

et $u_{n+1} = u_n + 3n + 1$.

On peut alors réaliser un algorithme qui affiche la valeur de u_n pour n entré par l'utilisateur.

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  N EST_DU_TYPE NOMBRE
  U EST_DU_TYPE NOMBRE
  K EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE N
  U PREND_LA_VALEUR 1
  POUR K ALLANT_DE 1 A N-1
    DEBUT_POUR
    U PREND_LA_VALEUR U+3*K+1
    FIN_POUR
  AFFICHER U
FIN_ALGORITHME
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer N : 8
92
***Algorithme terminé***
```

```
***Algorithme lancé***
Entrer N : 2011
6065176
***Algorithme terminé***
```

Ainsi, la figure 8 comportera 92 points, la figure 2011 comportera 6 065 176 points.