Terminale S

Ch.5

LA FONCTION EXPONENTIELLE

I. La fonction exponentielle

1 / définition, existence et unicité

Propriété
Si f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$ alors f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

démonstration
Soit f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Considérons la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=f(x)\times f(-x)$; h est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$\forall x\in \mathbb{R}$, $h'(x)=f'(x)\times f(-x)+f(x)\times\left[-f'(-x)\right]=f(x)\times f(-x)-f(x)\times f(-x)=0$. On en déduit que la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, $h(0)=f(0)^2=1$ donc $\forall x\in \mathbb{R}$, $h(x)=f(x)\times f(-x)=1$ et f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Propriété et définition
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'=f$ et $f(0)=1$.
Cette fonction est appelée **fonction exponentielle** provisoirement notée **exp.**
Ainsi pour tout réel x, on a : $\exp'(x)=\exp(x)$ et $\exp(0)=1$.

Démonstration ▸ unicité **(ÉXIGÉE)**
On admet l'existence d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g'=g$ et $g(0)=1$.

La fonction exp ne s'annulant pas, on peut définir $\varphi=\dfrac{g}{\exp}$ sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x\in \mathbb{R},\ \varphi'(x)=\frac{g'(x)\times\exp(x)-g(x)\times\exp'(x)}{\left[\exp(x)\right]^2}=\frac{g(x)\times\exp(x)-g(x)\times\exp(x)}{\left[\exp(x)\right]^2}=0.$$ φ est donc constante et

puisque $\varphi(0)=1$ alors $\forall x\in \mathbb{R}$, $\varphi(x)=\dfrac{g(x)}{\exp(x)}=1$ et $g(x)=\exp(x)$.

2 / propriétés algébriques

Propriété ▸ relation fonctionnelle
Quel que soit les réels a et b, $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$.

Démonstration **(NON ÉXIGÉE)**
Soit v la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $v(x)=\exp(a+b-x)\times\exp(x)$ alors $\forall x\in \mathbb{R}$:
$$v'(x)=-\exp'(a+b-x)\times\exp(x)+\exp(a+b-x)\times\exp'(x)=-\exp(a+b-x)\times\exp(x)+\exp(a+b-x)\times\exp(x)=0.$$
La fonction v est donc constante ; de plus :
$v(0)=\exp(a+b+0)\times\exp(0)=\exp(a+b)$ et $v(b)=\exp(a+b-b)\times\exp(b)=\exp(a)\times\exp(b)$.
Or $v(0)=v(b)$ donc $\exp(a+b)=\exp(a)\times\exp(b)$ cqfd.

Propriétés
Pour tout réel x, pour tout réel y et pour tout entier n, on a :

❶ $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$ ❷ $\exp(x-y)=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$ ❸ $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$

Démonstration

❶ $\exp(-x)\times\exp(x)=\exp(-x+x)=\exp(0)=1$; de plus la fonction exponentielle ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc :

$\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.

❷ $\exp(x-y)=\exp\left[x+(-y)\right]=\exp(x)\times\exp(-y)=\exp(x)\times\dfrac{1}{\exp(y)}=\dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

❸ On utilise ici une raisonnement par récurrence :

soit x un réel et n un entier naturel et soit $P(n)$ la propriété : " $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$ "

- **Initialisation :** $\exp(0\times x)=\exp(0)=1$ et $\left[\exp(x)\right]^0=1$ donc $P(0)$ est vraie.
- **Hérédité :** on suppose que $P(n)$ est vraie à un certain rang n fixé c'est-à-dire que : $\exp(nx)=\left[\exp(x)\right]^n$

  alors : $\exp\left[(n+1)x\right]=\exp(nx+x)=\exp(nx)\times\exp(x)=\left[\exp(x)\right]^n\times\exp(x)=\left[\exp(x)\right]^{n+1}$

  et donc $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

3 / la notation e^x

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e , c'est-à-dire : $\exp(1)=e$.

Conséquence : d'après les propriétés précédentes, on a : $\exp(n)=\exp(1\times n)=\left[\exp(1)\right]^n=e^n$.

On généralise alors cette égalité :

Notation

On note e^x l'image de x par la fonction exponentielle c'est-à-dire : $\exp(x)=e^x$.

Avec cette nouvelle notation, les propriétés vues précédemment s'écrivent :

Propriétés

Pour tout réel x, pour tout réel y et pour tout entier n, on a :

- relation fonctionnelle : $e^{x+y}=e^x\times e^y$

- $e^{x+y}=e^x\times e^y$ • $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ • $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ • $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$

Remarques

- On retrouve les formules classiques sur les puissances :

  ainsi $e^3=\exp(3)=\exp(1\times 3)=\left[\exp(1)\right]^3=\exp(1)\times\exp(1)\times\exp(1)=e\times e\times e$.

  On a aussi : $e^0=1$ et $e^1=e$.
- À la calculatrice, on obtient : $e\approx 2{,}718\,28$ à 10^{-5} près.

  Pour calculer e^x, on utilise les touches **2nde** **ln** ou **shift** **ln**

Exercice 1

1 / Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A=\frac{e^{2x}}{e^{3x}} \quad ; \quad B=e^{x}\left(1+2e^{-x}\right) \quad ; \quad C=\frac{e^{2+x}}{e^{1+x}} \quad ; \quad D=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2} \quad ; \quad E=\frac{e^{2x-1}}{\left(e^{x}\right)^{2}}$$

2 / Établir les égalités suivantes :

a) Pour $x\neq 0$, $\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$ b) Pour $x\neq 0$, $\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}-\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

Solution

1 / $A=\dfrac{e^{2x}}{e^{3x}}=e^{2x-3x}=e^{-x}$;

$B=e^{x}\left(1+2e^{-x}\right)=e^{x}\times 1+2e^{x}\times e^{-x}=e^{x}+2e^{x+(-x)}=e^{x}+2e^{0}=e^{x}+2$;

$C=\dfrac{e^{2+x}}{e^{1+x}}=e^{2+x-(1+x)}=e^{1}=e$

$D=\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}=\left(e^{x}\right)^{2}+2e^{x}\times e^{-x}+\left(e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+2e^{x+(-x)}+e^{-2x}=e^{2x}+2e^{0}+e^{-2x}=e^{2x}+2+e^{-2x}$;

$E=\dfrac{e^{2x-1}}{\left(e^{x}\right)^{2}}=\dfrac{e^{2x}\times e^{-1}}{e^{2x}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

2 / a) $\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=\dfrac{e^{x}\left(1+\dfrac{1}{e^{x}}\right)}{e^{x}\left(1-\dfrac{1}{e^{x}}\right)}=\dfrac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$;

b) $\dfrac{e^{x}}{e^{x}-1}-\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{x}\left(e^{x}+1\right)-e^{x}\left(e^{x}-1\right)}{\left(e^{x}-1\right)\left(e^{x}+1\right)}=\dfrac{2e^{x}}{e^{2x}-1}=\dfrac{2\times e^{x}}{e^{x}\left(e^{x}-e^{-x}\right)}=\dfrac{2}{e^{x}-e^{-x}}$

II. Étude de la fonction exponentielle

1 / signe et sens de variation

Propriété
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $\forall x\in$ ° , $e^{x}>0$

démonstration
On sait déjà que la fonction exponentielle ne s'annule pas sur ° cad : $\forall x\in$ ° , $e^{x}\neq 0$.

On a de plus : $\forall x$, $e^{x}=\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^{2}>0$. D'où le résultat.

Propriété
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

démonstration
On sait que $\exp'=\exp$ et on sait que la fonction $\exp$ est strictement positive sur ° .

On en déduit que la fonction $\exp'$ est strictement positive sur ° et que la fonction $\exp$ est strictement croissante sur ° .

On en déduit les résultats suivants :

Propriétés Pour tous réels x et y :

❶ $e^{x}=e^{y}\Leftrightarrow x=y$ ❷ $e^{x}<e^{y}\Leftrightarrow x<y$

démonstrations

❶ Si $x=y$ alors $e^x=e^y$.

Réciproquement, raisonnons par l'absurde : on suppose que $e^x=e^y$ et $x\neq y$.

Alors :

- ou bien $x<y$ et dans ce cas (la fonction exponentielle étant strictement croissante) $e^x<e^y$ ce qui contredit l'hypothèse;
- ou bien $x>y$ ce qui implique que $e^x>e^y$ ce qui contredit encore l'hypothèse.

❷ Si $x<y$ alors $e^x<e^y$ (ceci découle du sens de variation de la fonction exponentielle).

Réciproquement : montrons que si $e^x<e^y$ alors $x<y$.

Raisonnons par l'absurde : on suppose donc que $e^x<e^y$ et $x\geq y$.

$x\geq y$ implique que $e^x\geq e^y$ ce qui contredit l'hypothèse.

Remarque

En particulier, comme $e^0=1$, $e^x>1\Leftrightarrow x>0$

Exercice 2

Résoudre dans ° : **a /** $e^{x+7}=1$ **b /** $e^{x+3}=e^{x^2+1}$ **c /** $e^{-3x^2}-e^{-12}>0$

Solution

a / $e^{x+7}=1\Leftrightarrow e^{x+7}=e^0$

$\Leftrightarrow x+7=0$

$\Leftrightarrow x=-7$

D'où : $S=\{-7\}$

b / $e^{x+3}=e^{x^2+1}\Leftrightarrow x+3=x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$

2 étant une racine évidente, et l'équation est du type $x^2-Sx+P=0$, on en déduit que l'autre racine est -1

c / $e^{-3x^2}-e^{-12}>0\Leftrightarrow e^{-3x^2}>e^{-12}$

$\Leftrightarrow -3x^2>-12$

$\Leftrightarrow x^2<4$

D'où : $S=]-2\,;2[$

2 / limites en $-\infty$ et en $+\infty$

Propriétés

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Démonstration **(ÉXIGÉE)**

- Soit g la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^x-x$. Sa dérivée est : $g'(x)=e^x-1$

Signe de $g'(x)$: $g'(x)>0\Leftrightarrow e^x-1>0\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow e^x>e^0\Leftrightarrow x>0$.

Sur $[0\,;+\infty[$, on a donc $g'(x)>0$ et la fonction g est strictement croissante.

Ainsi, pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $g(x)\geq g(0)$ cad $g(x)\geq 1$.

Donc pour tout $x\geq 0$, $g(x)\geq 0$ cad $e^x\geq x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ donc d'après le th. de minoration sur les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

- Posons : $X=-x$. Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-X}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}$.

Or d'après le résultat précédent, $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$. Par inverse des limites, il en résulte que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^X}=0$.

Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

Remarques

- l'axe des abscisses et donc asymptote à la courbe représentative de la fonction $\exp$ en $-\infty$.
- Par composée de limites, on a aussi : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

2 / courbe représentative de la fonction exponentielle

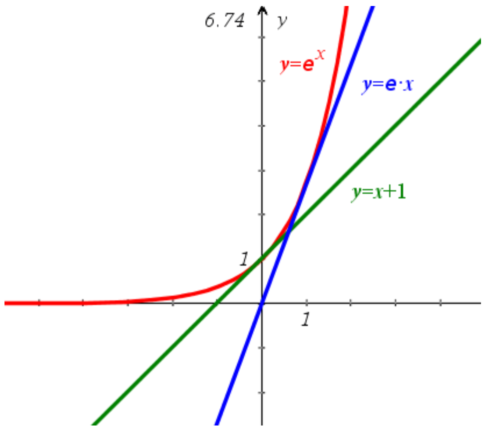


Tableau de variation de la fonction $\exp$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
$\exp(x)=e^x$	$0 \nearrow +\infty$

Pour tracer la courbe de la fonction $\exp$, il est intéressant de tracer les tangentes aux points d'abscisses 0 et 1

Tangentes particulières :

● au point d'abscisse 0 : une équation de la tangente est $y=x+1$;

● au point d'abscisse 1 : une équation de la tangente est $y=ex$.

3 / autres limites

Propriétés

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

Croissances comparées

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$

(dans le langage courant, on dira "qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur x")

démonstration

● la fonction exponentielle est dérivable sur °, donc en particulier en 0.

$\exp'(0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{0+h}-e^0}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}$; or $\exp'(0)=e^0=1$. D'où $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$

● Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. f et f' sont dérivables sur °.

On a $f'(x)=e^x-x$ et $f''(x)=e^x-1$.

On a démontré que pour $x\geq 0$, $e^x\geq 1$ donc $f''(x)\geq 0$ et f' est croissante sur $[0;+\infty[$.

Comme $f'(0)=1$, pour tout $x\geq 0$, $f'(x)\geq f'(0)$ cad $f'(x)\geq 1>0$ et f est croissante sur $[0;+\infty[$.

On en déduit que pour tout $x\geq 0$, $e^x>\dfrac{x^2}{2}$ soit $\dfrac{e^x}{x}>\dfrac{x}{2}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$, d'après le th. de minoration, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

● On pose $X=-x$, alors $Xe^X=-xe^{-x}=-\dfrac{x}{e^x}$.

quand $x\to+\infty$, $X\to-\infty$. Ainsi $\lim\limits_{X\to-\infty}Xe^X=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{x}{e^x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ (par inverse des limites)

Exercice 3

Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ des fonctions f et g définies par : $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x+1}$;

on écrira $g(x)$ sous la forme $\dfrac{e^x}{x}\times u(x)$

solution

- $f(x)=\dfrac{(e^x)^2}{x^2}=\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2$

Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to+\infty$ donc par puissance de limite, $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2\to+\infty$. Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Quand $x\to-\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to 0$ donc par puissance de limite, $\left(\dfrac{e^x}{x}\right)^2\to 0$. Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

- On observe que l'expression de g conduit à une forme indéterminée.

$$g(x)=\frac{e^x}{x}\times\frac{1-1/e^x}{1-1/x}$$

Quand $x\to+\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to+\infty$ et $\dfrac{1-1/e^x}{1-1/x}\to 1$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Quand $x\to-\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to 0$ et $\dfrac{1-1/e^x}{1-1/x}\to 1$ donc par produit des limites $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

Exercice 4

Démontrer les propriétés

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x=0$

(dans le langage courant, on dira "qu'à l'infini, l'exponentielle l'emporte sur la puissance)

Solution

- On pose $X=\dfrac{x}{n}$ alors $\dfrac{e^x}{x^n}=\dfrac{e^{nX}}{(nX)^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\dfrac{(e^X)^n}{X^n}=\dfrac{1}{n^n}\times\left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n$.

Qd $x\to+\infty$, $X\to+\infty$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{e^X}{X}\to+\infty\\ \left(\dfrac{e^X}{X}\right)^n\to+\infty\\ \dfrac{1}{n^n}\ constante\ positive\end{array}\right\}\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{nX}}{(nX)^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}+\infty$$

- On effectue el même changement de variable : $x^n e^x=(nX)^n\times e^{nX}=n^n\times X^n\times(e^X)^n=n^n\times(Xe^X)^n$. Le résultat en découle rapidement.

Remarque

Attention, un mauvais choix de fenêtre de calculatrice peut induire en erreur. On voit notamment que sur la **fig.a**, la fonction f_1 semble croître beaucoup plus rapidement vers $+\infty$ que la fonction f_2 ce qui indiquerait alors que

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^6}=0$!!!

Après modification de la fenêtre, on obtient une représentation bien plus pertinente de la croissance comparée.

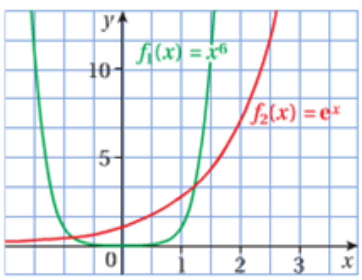


fig. a.

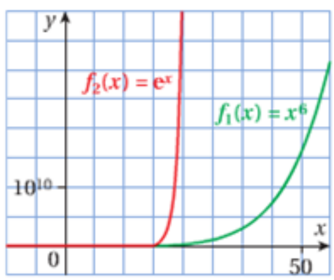


fig. b.

III. Fonction dela forme e^u

1 / dérivée et sens de variation

On applique les résultats sur les fonctions composées

Propriété

❶ Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f définie sur I par $f(x)=e^{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est : $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$.

❷ La fonction e^u a le même sens de variation que la fonction u.

démonstration du ❷

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{u(x)}>0$ donc $u'(x)e^{u(x)}$ a le même signe que $u'(x)$. D'où le résultat.

Exercice 5

Calculer les dérivées des fonctions définies par : $f(x)=e^{3x}$; $g(x)=e^{\cos x}$; $h(x)=(x+3)e^{\sqrt{x+1}}$; $k(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$

2 / des fonctions e^u particulières

1► Fonctions $f_k : x \mapsto e^{-kx}$, $k>0$

(exemples : $f_{0,5} : x \mapsto e^{-0,5x}$ ou $f_3 : x \mapsto e^{-3x}$)

- **signe** : les fonctions f_k sont positives.

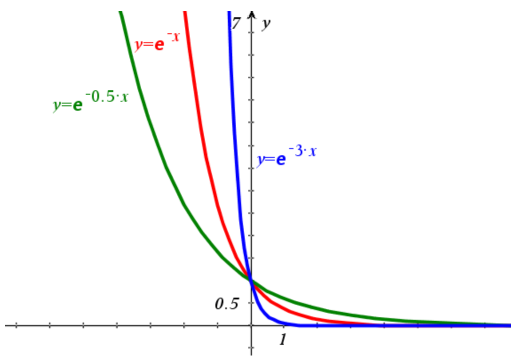
- **variations** : $f_k'(x)=-ke^{-kx}$. Sachant que $k>0$ et $e^{-kx}>0$, on en déduit que $f_k'(x)<0$.
  Les fonctions f_k sont décroissantes sur $\mathbb{R}$.

- **limites** : $-kx$ est du signe contraire de x, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx}=+\infty$.

- **tableau de variation** :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

- **courbe représentative**



2► Fonctions $g_k : x \mapsto e^{-kx^2}$, $k>0$

(exemples : $g_{0,5} : x \mapsto e^{-0,5x^2}$ ou $g_3 : x \mapsto e^{-3x^2}$)

- **signe** : les fonctions g_k sont positives.

- **variations** : $g_k'(x)=-2kx\times e^{-kx^2}$. Sachant que $k>0$ et $e^{-kx^2}>0$, il s'en suit que $g_k'(x)$ a le signe contraire de x.
  Les fonctions g_k sont croissantes sur $]-\infty;0]$ et décroissantes sur $[0;+\infty[$.

- **limites** : $-kx^2<0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-kx^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-kx^2}=0$.

● **tableau de variation** :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g_k'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$ 0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

● **courbe représentative**