Fiche 2 ➥ nombres complexes (partie 2)

Exercice 1

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

2) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
a/ Calculer le module et un argument du nombre a.
b/ Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
c/ Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
d/ Placer les points A, B et C dans le repère $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2)** d/ complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3) On considère les points A', B' et C' d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.
a/ Montrer que $b' = 8$.
b/ Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite, on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4) On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n, alors le milieu du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n-m|$.
a/ On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments $[A'B]$, $[B'C]$ et $[C'A]$.
Calculer r et s.
b/ Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

Exercice 2

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.
On considère le point d'affixe 4, le point B d'affixe $4i$ et les points C et D tels que $ABCD$ est un carré de centre O.
Pour tout entier naturel

non nul, on appelle M_n, le point d'affixe $z_n = (1+i)^n$.

1) Écrire le nombre $1+i$ sous forme exponentielle.

2) Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 que l'on précisera, tel que, pour tout entier $n \geq n_0$, le point M_n est à l'extérieur du carré $ABCD$.

AMBITION-MATHS

Exercice 3

On veut modéliser dans le plan la coquille d'un nautile à l'aide d'une ligne brisée en forme de spirale. On s'intéresse à l'aire délimitée par cette ligne.

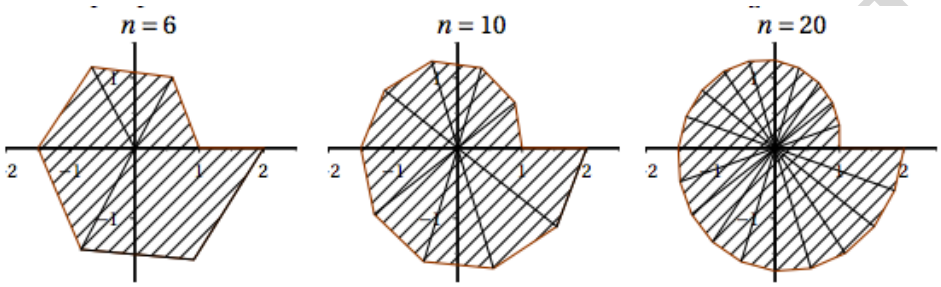
On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Pour tout entier k allant de 0 à n, on définit les nombres complexes

$$z_k=\left(1+\frac{k}{n}\right)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{et on note } M_k \text{ le point d'affixe } z_k.$$

Dans ce modèle, le pourtour du nautile est la ligne brisée reliant tous les points M_k avec $0\le k\le n$.

Par exemple, pour les entiers $n=6$, $n=10$ et $n=20$, on obtient les figures ci-dessous.



Partie A : Ligne brisée formée à partir de sept points

Dans cette partie, on suppose que $n=6$. Ainsi, pour $0\le k\le 6$ on a $z_k=\left(1+\frac{k}{6}\right)e^{i\frac{2k\pi}{6}}$.

1) Déterminer la forme algébrique de z_1.

2) Vérifier que z_0 et z_6 sont des entiers que l'on déterminera.

3) Calculer la longueur de la hauteur issue de M_1 dans le triangle OM_0M_1 puis établir que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{7\sqrt{3}}{24}$.

Partie B : Ligne brisée formée à partir de $n+1$ points

Dans cette partie, n est un entier supérieur ou égal à 2.

1) Pour tout entier naturel k tel que $0\le k\le n$, déterminer la longueur OM_k.

2) Pour tout k entier tel que $0\le k\le n-1$, déterminer une mesure des angles $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_k}\right)$ et $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM_k}\,;\overrightarrow{OM_{k+1}}\right)$.

3) Pour k entier tel que $0\le k\le n-1$, démontrer que la longueur de la hauteur issue de M_{k+1} dans le triangle OM_kM_{k+1} est égale à $\left(1+\frac{k+1}{n}\right)\times\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.

4) On admet que l'aire du triangle OM_kM_{k+1} est égale à $a_k=\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$ et que l'aire totale délimitée par la ligne brisée est égale à $A_n=a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}$.

L'algorithme suivant permet de calculer l'aire A_n lorsqu'on entre l'entier n :

AMBITION-MATHS

VARIABLES	A est un nombre réel
	k est un entier
	n est un entier
TRAITEMENT	Lire la valeur de n
	A prend la valeur 0
	Pour k allant de 0 à n-1
	A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
	Fin Pour
SORTIE	Afficher A

On entre dans l'algorithme, $n=10$

Recopier et compléter le tableau ci-dessous qui illustre le fonctionnement de l'algorithme :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	0,323	0,711	1,170	1,705	2,322	3,027	3,826	4,726		

5) On admet que $A_2=0$ et que la suite (A_n) converge et que $\lim\limits_{+\infty} A_n=\frac{7\pi}{3}\approx 7{,}3$.

Recopier et compléter les lignes L6 et L13 de l'algorithme ci-après qui permet de déterminer le plus petit entier n tel que $A_n\geq 7{,}2$. On ne demande pas de déterminer n.

*L*1	VARIABLES :	A est un nombre réel
*L*2		k est un entier
*L*3		n est un entier
*L*4	TRAITEMENT :	n prend la valeur 2
*L*5		A prend la valeur 0
L6		**Tant que**.....
*L*7		n prend la valeur $n+1$
*L*8		A prend la valeur 0
*L*9		Pour k allant de 0 à $n-1$
*L*10		A prend la valeur $A+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\times\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$
		Fin Pour
*L*12		Fin Tant que
L13	**SORTIE :**	**Afficher** ...

AMBA MATHS