Terminale S

Ch.5

LES NOMBRES COMPLEXES
CORRECTION PARTIELLE ➨ FICHE 2

Exercice 1

a)

$$z=z' \Leftrightarrow a+3i=\frac{2+4i}{1-i}$$
$$\Leftrightarrow (a+3i)(1-i)=2+4i$$
$$\Leftrightarrow a+3+i(-a+3)=2+4i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+3=2 \\ -a+3=4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{a=-1}$$

$$z=z' \Leftrightarrow (a^2+a-1)+ai=1-i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-1=1 & (E1) \\ a=-1 & (E2) \end{cases}$$

en remplacant $a=-1$ *dans* $(E1)$*, l'equation n'est pas verifiee*

le systeme n'admet aucune solution

Exercice 2

On donne : $P(z)=z^2-4z+5$

➨ $P(2+i)=(2+i)^2-4(2+i)+5=4+4i-1-8-4i+5=\underbrace{4-1-8+5}_{=0}+\underbrace{4i-4i}_{=0}=0$ *cqfd*

➨ $P(2-i)=(2-i)^2-4(2-i)+5=4-4i-1-8+4i+5=\underbrace{4-1-8+5}_{=0}+\underbrace{4i-4i}_{=0}=0$ *cqfd*

Remarque : ayant vérifié que $z_1=2+i$ est l'une des racines de $P(z)$, on pouvait en conclure que l'autre racine est le conjugué de $2+i$ soit $z_2=2-i$!!!

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=(2+i)z^2+3iz+1$

a) $f(i)=(2+i)i^2+3i^2+1=-(2+i)-3+1=-4-i$

b) $f(2-i)$ $f(2-i)=(2+i)(2-i)^2+3i(2-i)+1=\underbrace{(2+i)(2-i)}_{=5}(2-i)+6i+3+1=10+3+1-5i+6i=14+i$

c)

$$f\left(\frac{1}{1+i}\right)=f\left(\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}\right)$$
$$=f\left(\frac{1-i}{2}\right)$$
$$=(2+i)\left(\frac{1-i}{2}\right)^2+3i\left(\frac{1-i}{2}\right)+1$$
$$=\frac{(2+i)(\cancel{1}-\cancel{1}-2i)}{4}+\frac{3i+3}{2}+1$$
$$=\frac{-i(2+i)+3i+3+2}{2}$$
$$=\frac{1+3+2-2i+3i}{2}$$
$$=3+\frac{i}{2}$$

remarque : ces résultats peuvent être très rapidement vérifiés sur calculatrice !

Exercice 4

➨ Résolution dans $\mathbb{C}$ de chacune des équations suivantes :

a)

$$z^2+81=0 \Leftrightarrow z^2=-81=81i^2=(9i)^2 \Leftrightarrow z=9i \quad ou \quad z=-9i$$

$$S=\{-9i\,;9i\}$$

b)

$$z^2-6z+9=0 \Leftrightarrow (z-3)^2=0 \Leftrightarrow z-3=0 \Leftrightarrow z=3$$

$$S=\{3\}$$

c) $\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z+1=0 \Leftrightarrow 3z^2+2z+6=0$ On reconnaît un polynôme de degré 2.

Calcul de Δ : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4(3)(6)=4-72=-68=(2i\sqrt{17})^2$

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{-2-2i\sqrt{17}}{2}=-1-i\sqrt{17}$; $z_2=\overline{z_1}=-1+i\sqrt{17}$ $\qquad S=\{-1-i\sqrt{17}\ ;\ -1+i\sqrt{17}\}$

d) $z^2-(1+\sqrt{5})z+\sqrt{5}=0$

On reconnaît un polynôme de degré 2, calculons Δ :

$$\begin{aligned}\Delta=b^2-4ac&=\left[\left(-(1+\sqrt{5})\right)^2-4\times1\times\sqrt{5}\right]\\&=1+2\sqrt{5}+5-4\sqrt{5}\\&=1-2\sqrt{5}+5\\&=1^2-2\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2\\&=(1-\sqrt{5})^2\end{aligned}$$

$\Delta>0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes.

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{5}-1+2\sqrt{5}}{2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{5}+1-2\sqrt{5}}{2}=\frac{2-\sqrt{5}}{2}$

$$S=\left\{\frac{3\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{2-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

d)

$$\frac{4}{z^2}-\frac{3}{z}+2=0 \Leftrightarrow z^2\left(\frac{4}{z^2}-\frac{3}{z}+2\right)=0\,;z\neq0$$

$$\Leftrightarrow 2z^2-3z+4=0\,;z\neq0$$

On reconnaît un polynôme de degré 2. Calcul de Δ : $\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times4=9-32=-23=(i\sqrt{23})^2$

$z_1=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\frac{3-i\sqrt{23}}{2}$; $z_2=\frac{3+i\sqrt{23}}{2}$ $\qquad S=\left\{\frac{3-i\sqrt{23}}{2}\ ;\ \frac{3+i\sqrt{23}}{2}\right\}$

Exercice 5

➨ Résolution dans $\mathbb{C}$, chacune des équations suivantes :

a) $5z=4-i \Leftrightarrow z=\frac{4}{5}-\frac{i}{5}$ $\qquad S=\left\{\frac{4}{5}-\frac{i}{5}\right\}$

b) $\left(1+i\right)\overline{z}+1-i=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\dfrac{-1+i}{1+i}=\dfrac{\left(-1+i\right)\left(1-i\right)}{\left(1+i\right)\left(1-i\right)}=\dfrac{\left(-1+1\right)+i\left(1+1\right)}{2}=\dfrac{2i}{2}=i$ $\qquad S=\left\{i\right\}$

c) $3\overline{z}-2iz=5-3i$

Posons $z=a+ib$.

L'équation devient :

$$3\left(a-ib\right)-2i\left(a+ib\right)=5-3i \Leftrightarrow 3a-3ib-2ai+2b=5-3i$$
$$\Leftrightarrow 3a+2b+i\left(-3b-2a\right)=5-3i$$

Deux nombres complexes sont égaux ssi ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

$$\begin{cases}3a+2b=5\\-2a-3b=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6a+4b=10\\-6a-9b=-9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-5b=1\\2b=5-3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\dfrac{1}{5}\\3a=5-2\left(-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{27}{5}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-\dfrac{1}{5}\\a=\dfrac{9}{5}\end{cases}$$

$$S=\left\{\frac{9}{5}-\frac{i}{5}\right\}$$

Exercice 6 ➔ sujet BAC

On considère le polynôme P défini par : $P\left(z\right)=z^4-6z^3+24z^2-18z+63$.

1 /

$$\begin{aligned}P\left(i\sqrt{3}\right)&=\left(i\sqrt{3}\right)^4-6\left(i\sqrt{3}\right)^3+24\left(i\sqrt{3}\right)^2-18\left(i\sqrt{3}\right)+63\\&=9-6\left(-3i\sqrt{3}\right)-72-18i\sqrt{3}+63\\&=9+18i\sqrt{3}-72-18i\sqrt{3}+63\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\left(-i\sqrt{3}\right)&=\left(-i\sqrt{3}\right)^4-6\left(-i\sqrt{3}\right)^3+24\left(-i\sqrt{3}\right)^2-18\left(-i\sqrt{3}\right)+63\\&=9-6\left(3i\sqrt{3}\right)-72+18i\sqrt{3}+63\\&=9-18i\sqrt{3}-72+18i\sqrt{3}+63\\&=0\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}P\left(z\right)&=\left(z-i\sqrt{3}\right)\left(z+i\sqrt{3}\right)\left(az^2+bz+c\right)\\&=\left(z^2+3\right)\left(az^2+bz+c\right)\end{aligned}$$

Par identification des coefficients, $\begin{cases}a=1\\9c=63\\b=-6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\c=21\\b=-6\end{cases}$

D'où $P\left(z\right)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$.

2 / Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2-6z+7=0$.

On reconnaît un polynôme de degré 2. Calcul de Δ :

$\Delta=b^2-4ac=\left(-6\right)^2-4\times1\times21=36-84=-48=\left(4i\sqrt{3}\right)^2$

$\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes.

$x_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{6-4i\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3} \quad ; \quad x_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{6+4i\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$

conclusion : les solutions de $P\left(z\right)=0$ sont : $-i\sqrt{3} \quad ; \quad i\sqrt{3} \quad ; \quad 3-2i\sqrt{3} \quad ; \quad 3+2i\sqrt{3}$.