SPÉ MATHS → Devoir n°3

Exercice 1

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & -4 \\ 5 & 13 & 6 \\ -2 & -9 & 8 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

a/ Donner le format de A .

b/ Donner la valeur de chacun des coefficients a_{23} , a_{41} , a_{31} , a_{13} .

c/ Écrire la transposée A^t de A et donner son format.

2) On donne $B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

Trouver x et y pour que $2B - 4C = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$.

3) VRAI ou FAUX ? On justifiera la réponse.

Pour toutes matrices carrées A et B d'ordre 2, on a : $(A \times B)^2 = A^2 \times B^2$.

Exercice 2

Effectuer « à la main » les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a/ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b/ $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

c/ $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

d/ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e/ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

f/ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 3

On considère les deux matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A+B$ puis $(A+B)^2$.

2) Calculer $A^2 + 2AB + B^2$.

3) Quel est le bon développement de $(A+B)^2$?

Exercice 4

Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Prouver que $B^2 = 5B$.
- 2) Utiliser ce résultat pour calculer très rapidement B^3 et B^4 .

Dans la suite de ce devoir on admet que :

Si A est une matrice carrée d'ordre n , alors :

• $A \times I_n = I_n \times A = A$

• on définit la puissance n ième de la matrice A par : $A^n = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$. Par convention : $A^0 = I_n$

Exercice 5

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. On propose dans cet exercice de calculer A^2 de deux façons.

- 1) À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice A^2 .

- 2) Considérons la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a / Vérifier « à la main » que $A = -2I + J$.

b / À l'aide de la calculatrice, déterminer J^2 puis en déduire l'expression de J^2 en fonction de J .

c / En déduire l'expression de A^2 en fonction de I et de J . Retrouver alors les résultats de la question 1).

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

- 1) a / Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$.

b / Vérifier alors à l'aide de la calculatrice que pour $n = 3$, $J^3 = 0_3$ puis en déduire que pour tout $n \geq 3$, on a : $J^n = 0_3$

- 2) a / Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$: $A^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$.

b / À l'aide de la calculatrice, déterminer J^2 , puis en déduire l'expression de A^n en fonction de n .