# Spécialité maths devoir n°6

## Exercice 1

On considère la matrice $A$ suivante : $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

**1)** À l'aide de la calculatrice, calculer $\left(A+I_3\right)^3$.

**2)** Développer $\left(A+I_3\right)^3$.

**3)** En factorisant correctement par $A$, en déduire que $A^{-1}=-\left(A^2+3A+3I_3\right)$.

## Exercice 2

On considère les matrices $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C=B-I_3$.

**1)** Calculer les matrices $B^2$ et $B^3$.

**2)** Établir, pour $n\geq 3$, que : $B^n=I_3+nC+\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}C^2$

**3)** En déduire $B^n$.



## Exercice 3

### Partie A : préliminaires

**1)** a/ Soient $n$ et $N$ deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2\equiv N-1\left[N\right]$.

Montrer que $n\times n^3\equiv 1\left[N\right]$

b/ Déduire de la question précédente un entier $k_1$ tel que : $5k_1\equiv 1\left[26\right]$.

On admettra que l'unique entier $k$ tel que : $0\leq k\leq 25$ et $5k\equiv 1\left[26\right]$ vaut 21.

**2)** On donne les matrices : $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ , $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ , $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a/ Calculer la matrice $6A-A^2$.

b/ En déduire que $A$ est inversible et que sa matrice inverse, notée $A^{-1}$, peut s'écrire sous la forme $A^{-1}=\alpha I+\beta A$ où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels que l'on déterminera.

c/ Vérifier que : $B=5A^{-1}$.

d/ Démontrer que si $AX=Y$ alors $5X=BY$.

## Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET » en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

• Le mot à coder est remplacé par la matrice $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où $x_1$ est l'entier représentant la première lettre du mot et $x_2$ la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| N | O | P | Q | R | S | T | U | V | W | X | Y | Z |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

• La matrice $X$ est transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y=AX$.

• La matrice $Y$ est transformée en la matrice $R=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où $r_1$ est le reste de la division euclidienne de $y_1$ par 26 et $r_2$ le reste de la division euclidienne de $y_2$ par 26.

• Les entiers $r_1$ et $r_2$ donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\rightarrow X=\begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R=\begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé)

## Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice $X$ a été transformée en la matrice $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y=AX$.

**1)** Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$

**2)** En utilisant la question 1) b/ de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \end{cases} [26]$.

**3)** Décoder le mot « QP ».