Terminale S

Ch.7 Limites de fonctions

I. Limite d'une fonction en l'infini

1 / Limite infinie

Approche intuitive

Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ (respectivement $-\infty$) en $+\infty$ signifie que $f(x)$ peut être "aussi grand que l'on veut" (respectivement "négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue") dès que x est "assez grand".

Définitions

• Dire qu'une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands . On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

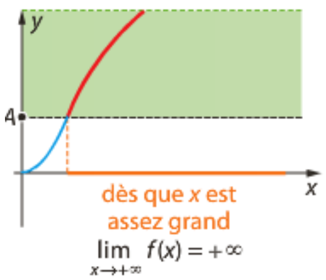
Autrement dit : pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.

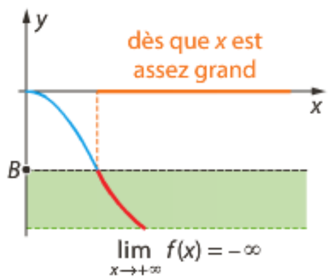
• Une fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que si $x > x_0$ alors $f(x) < A$.

• Une fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que si $x < x_0$ alors $f(x) > A$.

• Une fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si, pour tout réel A , il existe un réel x_0 tel que si $x < x_0$ alors $f(x) < A$.

Interprétation graphique





La courbe représentative de la fonction f est au-dessus (resp au-dessous) de toute droite parallèle à l'axe des abscisses pour x suffisamment grand.

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Prouvons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ c'est-à-dire que pour tout nombre réel A strictement positif, il existe un réel x_0 tel que $f(x) \in\,]A\,;+\infty[$ dès que $x < x_0$.

La condition $f(x) > A$ s'écrit $x^2 > A$ ce qui équivaut à $x < -\sqrt{A}$ ou $x > \sqrt{A}$.

On peut donc prendre $x_0 = -\sqrt{A}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Limites à l'infini des fonctions de référence

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$
- si n est pair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
- si n est impair, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exercice 1

f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=2\sqrt{x}-1$.

▸ Démontrer, avec la définition, que la fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Solution

Soit $A<-1$, il est clair que pour tout $x\in[0\,;+\infty[$, $f(x)>A$ (car $f(x)>-1$).

Soit A un nombre réel supérieur à -1. On cherche x_0 tel que pour tout $x>x_0$, $f(x)>A$.

Posons $x_0=\left(\dfrac{A+1}{2}\right)^2$; $x>x_0$ signifie que :

$$x>\left(\frac{A+1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}>\frac{A+1}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{x}>A+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x}-1>A \Leftrightarrow f(x)>A.$$

Donc l'intervalle $]A\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand. Ainsi la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$.

2 / Limite finie

Définitions

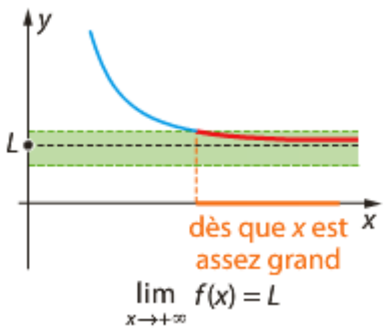
Soit L un nombre réel.

• Dire qu'une fonction f admet pour limite L en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands . On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=L$.

• Dire qu'une fonction f admet pour limite L en $-\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x négatifs et suffisamment grands en valeur absolue . On écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=L$.

• La droite d'équation $y=L$ est appelée asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$ (resp en $-\infty$).

Interprétation graphique



La courbe représentative de la fonction f devient aussi proche que l'on veut de la droite d'équation $y=L$ lorsque x est suffisamment grand.

Remarque

Pour rédiger une démonstration en utilisant la définition de limite finie en l'infini, on peut démontrer que :
pour ε réel fixé, il existe x_0 tel que pour tout $x>x_0$, $f(x)\in\,]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon[$.

Limites à l'infini de fonctions de référence :

• $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ • $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$

Exercice 2

On considère la fonction g définie sur $]-2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{3x-1}{x+2}$.

À l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite de f en $+\infty$ puis démontrer le résultat à l'aide de la définition.

II. Limite d'une fonction en un point

1 / Limite infinie

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un nombre réel, borne de I.

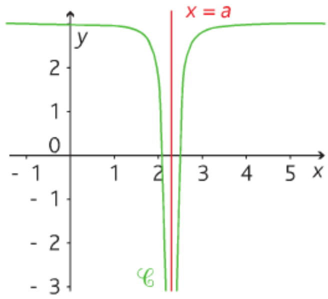
- Si $f(x)$ est " aussi grand que l'on veut " dès que x est " assez proche " de a, on dit que la limite en a de la fonction f est $+\infty$. On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et cela se traduit mathématiquement par :
  - ▸ pour tout réel $A > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \neq a$, $x \in]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$, $f(x) > A$.

- De même si $f(x)$ est " négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue" dès que x est " assez proche " de a, on dit que la limite en a de la fonction f est $-\infty$. On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ce qui se traduit par :
  - ▸ pour tout réel $A > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \neq a$, $x \in]a-\varepsilon\,;a+\varepsilon[$, $f(x) < A$.

- La droite d'équation $x = a$ est appelée asymptote verticale à la courbe représentative de f.

Interprétation graphique

La courbe représentative de f peut-être " aussi proche que l'on veut " de la droite d'équation $x = a$.



$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

2 / Limite à gauche, limite à droite

En pratique, on est parfois amené à étudier séparément les limites de f pour $x > a$ et pour $x < a$. On parle alors de limite à gauche et de limite à droite.

$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ et cela se traduit mathématiquement par :

▸ pour tout réel $A > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]a\,;a+\varepsilon[$, $f(x) > A$.

Exercice 3

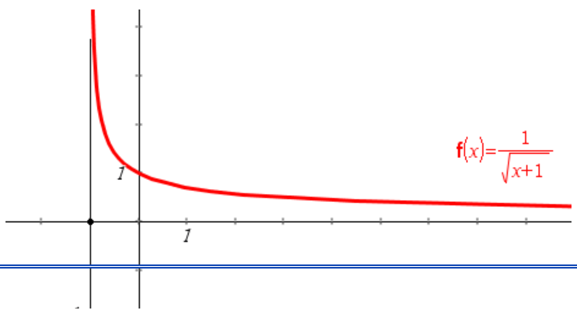
f est la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) Conjecturer à l'aide de la calculatrice, la limite de la fonction f en -1.

b) Démontrer cette conjecture.

c) Interpréter graphiquement cette limite.

Solution



b) Soit A réel fixé, $A>0$.
On cherche $\varepsilon>0$ tel que si $-1<x<-1+\varepsilon$ alors $f(x)>A$.

Posons $\varepsilon=\dfrac{1}{A^2}$:

$$\text{alors : } \begin{aligned} & -1<x<-1+\frac{1}{A^2} \\ \Leftrightarrow\ & 0<x+1<\frac{1}{A^2} \\ \Leftrightarrow\ & 0<\sqrt{x+1}<\frac{1}{A} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1}{\sqrt{x+1}}>A \qquad \textit{soit} \quad f(x)>A \end{aligned}$$

c) La droite d'équation $x=-1$ est asymptote à la courbe Cf.

Définition
a désigne un nombre réel et f est une fonction définie sur $\mathbb{R}-\{a\}$.
- Dire que f a une limite infinie en a signifie que f possède en a, une limite à gauche et une limite à droite (infinies) et que ces limites sont égales. On a alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

Remarque
Une limite à gauche (ou à droite) infinie de la fonction f en a, suffit à conclure que la droite d'équation $x=a$ est une asymptote verticale à Cf.

Exercice 4

1/ On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}-\{5\}$ par $g(x)=\dfrac{1}{x-5}$.

a) Représenter graphiquement la fonction g sur la calculatrice.

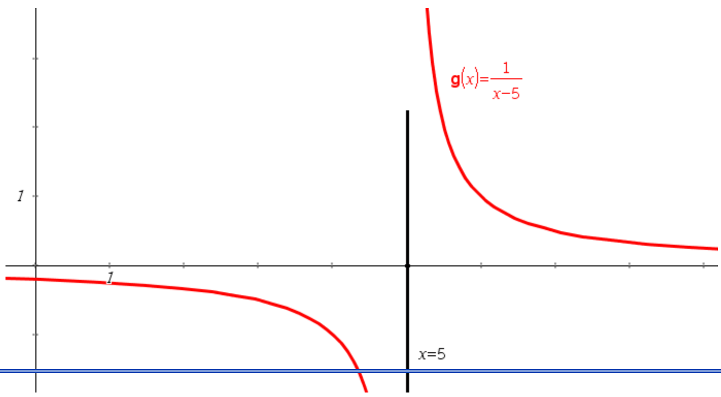
b) Conjecturer les limites à gauche et à droite de g en 5.

c) Vérifier ces conjectures sur la TI n'spire (ou autre logiciel de calcul formel (ex : logiciel Xcas).

d) Donner une interprétation graphique de ces résultats.

2/ Mêmes consignes avec la fonction h définie sur $\mathbb{R}-\{5\}$ par $h(x)=\dfrac{1}{(x-5)^2}$.

Solution
1/
b) On observe graphiquement que : $\lim\limits_{x\to 5^-} g(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} g(x)=+\infty$

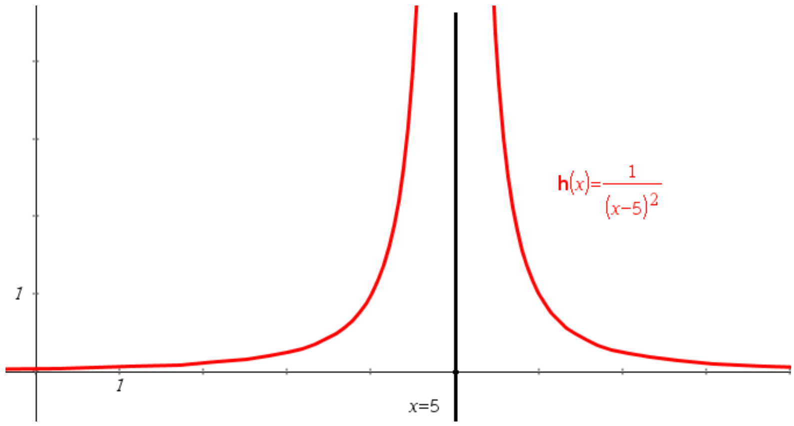


c)

Define $g(x)=\frac{1}{x-5}$	*Terminé*
$\lim\limits_{x\to 5^+}(g(x))$	∞
$\lim\limits_{x\to 5^-}(g(x))$	$-\infty$

d) La fonction g admet une limite infinie à droite en 5 (et une limite infinie à gauche en 5) donc la droite d'équation $x=5$ est une asymptote à la courbe Cg.

2/



b) On observe graphiquement que : $\lim\limits_{x\to 5^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 5} h(x) = +\infty$.

c)

Define $h(x)=\frac{1}{(x-5)^2}$	*Terminé*
$\lim\limits_{x\to 5^-}(h(x))$	∞
$\lim\limits_{x\to 5^+}(h(x))$	∞

d) Il semble que la fonction h admette une limite infinie en 5, donc la droite d'équation $x=5$ est une asymptote à la courbe Ch.

Limites en 0 de fonctions de référence :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad et \quad \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ *et* $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

2 / Limite finie

Définition

- Dire que f a pour limite l quand x tend vers a, signifie que tout intervalle ouvert contenant l contient tous les $f(x)$ pour x assez proche a.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$.

En posant $x = 0 + h$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - 0}{x - 0} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(0+h) - \sin 0}{h} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

Remarque

Si a appartient à l'ensemble de définition d'une fonction usuelle f (fonction polynôme, fonction rationnelle, fonction trigonométrique, ...) alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Résultat lié à la notion de continuité des fonctions usuelles (notion qui sera étudiée plus tard).

Exemple

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x}{x+2} = \dfrac{1}{1+2} = \dfrac{1}{3}$

III. Opérations sur les limites

Les résultats vus sur les limites de suites sont applicables sur les limites de fonctions. On rappelle qu'il y a quatre fromes indéterminées (**F.I.**) notées en utilisant un abus d'écriture : " $\infty - \infty$ " , " $0 \times \infty$ " , " $\dfrac{\infty}{\infty}$ " , " $\dfrac{0}{0}$ ".

a désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$; l et l' désignent des réels

▶ **Limite d'une somme de fonctions**

données	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0
	$\lim\limits_{x \to a} g(x) = \dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
concl.	$\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = \dots$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	$+\infty$	$-\infty$

▶ **Limite d'un produit de fonctions**

donnée	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dots$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	0

	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\dots$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
concl.	$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\dots$	$l\times l'$	$+\infty$ si $l>0$ $-\infty$ si $l<0$	$-\infty$ si $l>0$ $+\infty$ si $l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**	**F.I.**

▸ **Limite d'un quotient de fonctions**

données	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\dots$	l	$l\neq 0$	$l\neq 0$	l	l	0	∞
données	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=\dots$	$l'\neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$	0	∞
concl.	$\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dots$	$\dfrac{l}{l'}$	$+\infty$ si $l>0$ $-\infty$ si $l<0$	$-\infty$ si $l>0$ $+\infty$ si $l<0$	0^+ si $l\geq 0$ 0^- si $l\leq 0$	0^- si $l\geq 0$ 0^+ si $l\leq 0$	**F.I.**	**F.I.**

Exercice 5

Déterminer dans chaque cas, la limite de la fonction f en α.

1 / f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ et $\alpha=0$.

2 / f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-2)\left(x^2+1\right)$ et $\alpha=-\infty$.

3 / f est définie sur $\mathbb{R}-\left\{-3/5\right\}$ par $f(x)=\dfrac{2x-4}{5x+3}$ et $\alpha=+\infty$.

solution

1 / $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$, donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$, donc par somme des limites, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$.

2 / $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$, donc par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

3 / $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-4)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(5x+3)=+\infty$, il s'agit d'un orme indéterminée.

Levons l'indétermination : $\dfrac{2x-4}{5x+3}=\dfrac{x\left(2-\dfrac{4}{x}\right)}{x\left(5+\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{2-4/x}{5+3/x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-4/x}{5+3/x}\right)=\dfrac{2}{5}$

IV. Définition et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F et g une fonction définie sur l'ensemble F.

La fonction notée $g\circ f$ est définie par : $g\circ f(x)=g\left[f(x)\right]$, elle est appelée **composée de f suivie de g**.

$$E\xrightarrow{f}F\xrightarrow{g}\mathbb{R}$$

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g\left[f(x)\right]$$

$g \circ f$

Exemple

Soit f et g les fonctions définies respectivement sur ° par : $f(x)=3x+5$ et $g(x)=3x^2$.

Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$

Solution

$g \circ f(x)=g\left[f(x)\right]=g(3x+5)=3(3x+5)^2=3\left(9x^2+30x+25\right)=27x^2+90x+75$.

$f \circ g(x)=f\left[g(x)\right]=f\left(3x^2\right)=3\left(3x^2\right)+5=9x^2+5$.

Remarque

Attention à l'ordre des lettres pour définir la composée de fonctions. En général, $f \circ g \neq g \circ f$

Théorème de composition de limites

a, b et c désignent trois réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f et g sont des fonctions.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{X\to b} g(X)=c$ alors $\lim\limits_{x\to a} g \circ f(x)=c$

Exemples

a) Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\sqrt{\dfrac{2x+1}{x}}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

b) Soit k la fonction définie sur °* par $k(x)=\left(\dfrac{1}{x}+5\right)^2$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)$.

Solution

a) $h=g \circ f$ avec $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ et $g(X)=\sqrt{X}$.

- Déterminons la limite de f en $+\infty$:

  quand $x\to+\infty$, $2x+1\to+\infty$ et $x\to+\infty$. Il s'agit d'une forme indéterminée.

  $f(x)=\dfrac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x}=2+\dfrac{1}{x}$. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)=2$.

- Déterminons la limite de g en 2 :

  quand $X\to 2$, $\sqrt{X}\to\sqrt{2}$ cad $\lim\limits_{X\to 2} g(X)=\sqrt{2}$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x)=\sqrt{2}$.

b) $k=g \circ f$ avec $f(x)=\dfrac{1}{x}+5$ et $g(X)=X^2$.

- Déterminons la limite de f en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$
- Déterminons la limite de g en 5 : $\lim\limits_{x\to 5} g(X)=g(5)=25$

On en déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g \circ f(x)=25$

V. Limites et comparaison

Propriétés

a et l désignent deux réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. f, g et h sont des fonctions.

Si pour tout réel x voisin de a :

- $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=l$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ **(théorème des gendarmes)**
- $g(x)\leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

- $f(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exercice 6

1 / Soit f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2 / Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{10 - x}{5 - \cos(x)}$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.