NOMBRES COMPLEXES(partie 1) ➡ fiche synthèse

I. Ensemble des nombres complexes

▶ **définition**

• L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres z de la forme $z=a+ib$, avec a, b réels.
L'écriture de z sous la forme $a+ib$ s'appelle **forme algébrique** de z.
Le réel a s'appelle **partie réelle** de z, on note : $a=\text{Re}(z)$;
le nombre b s'appelle **partie imaginaire** de z, on note : $b=\text{Im}(z)$.

• Le nombre i vérifie : $i^2=-1$.

• Les règles de calculs (addition, soustraction, multiplication, inverse, quotient) dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Méthode : opérations sur les nombres complexes

On donne : $z=2+3i$ et $z'=4-5i$. Calculer $z+z'$, $z-z'$, zz', $\frac{1}{z'}$ et $\frac{z}{z'}$

• Pour additionner deux nombres complexes, on additionne entre elles, les parties réelles d'une part, et les parties imaginaires d'autres part. Même principe pour la soustraction.

$z+z'=2+3i+4-5i=(2+4)+i(3-5)=6-2i$ $\qquad$ $z-z'=2+3i-(4-5i)=(2-4)+i(3+5)=-2+8i$

• En observant que le produit de :
deux réels est un réel
deux imaginaires purs est un réel
d'un réel par un imaginaire pur est un imaginaire pur,

$$zz'=(2+3i)(4-5i)=(2\times4+3\times5)+i(2\times(-5)+3\times4)=23+2i$$

• Pour déterminer l'inverse d'un nombre complexe, on utilise son expression conjuguée :

$$\frac{1}{z'}=\frac{1}{4-5i}=\frac{4+5i}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{4+5i}{16+25}=\frac{4}{41}+\frac{5}{41}i$$

• Le quotient de deux nombres complexes s'effectue ainsi :

$$\frac{z}{z'}=\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{(2+3i)(4+5i)}{(4-5i)(4+5i)}=\frac{(8-15)+i(10+12)}{16+25}=-\frac{7}{41}+\frac{22}{41}i$$

Remarques

• Si $z=a$, c'est-à-dire $\text{Im}(z)=0$, alors z est un réel. Ainsi l'ensemble $\mathbb{R}$ est contenu dans $\mathbb{C}$ (on note $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$).

• Si $z=ib$ c'est-à-dire $\text{Re}(z)=0$, alors z est appelé imaginaire pur. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

• L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique. Il en découle la propriété suivante :

▶ **propriété**

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\text{Re}(z_1)=\text{Re}(z_2)\\ \text{Im}(z_1)=\text{Im}(z_2)\end{cases}$$

II. Conjugué d'un nombre complexe

▶ **définition**

Soient z un nombre complexe de forme algébrique $a+ib$, avec a, b réels.

On appelle conjugué de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe défini par : $\overline{z}=a-ib$.

▶ **propriétés**

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors :

- $\overline{\overline{z}}=z$
- $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=z$
- $z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{z}=-z$
- $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$
- $\overline{zz'}=\overline{z}\times\overline{z'}$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n\ \ (n\in\mathbb{N})$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}=\frac{1}{\overline{z}}\ \ (z\neq 0)$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}\ \ (z'\neq 0)$
- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$

Exemples

Écrire les conjugués des nombres complexes suivants : $-2+3i$; $i(2-5i)$; $\frac{1-i}{2i}$

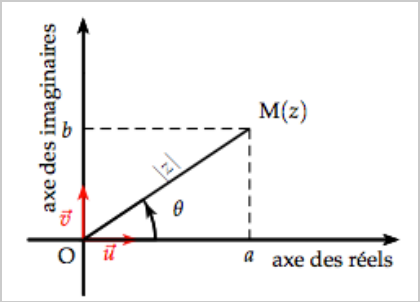
$\overline{-2+3i}=-2-3i$; $\overline{i(2-5i)}=\overline{5+2i}=5-2i$; $\overline{\left(\frac{1-i}{2i}\right)}=\frac{\overline{1-i}}{\overline{2i}}=\frac{1+i}{-2i}=\frac{(1+i)\times i}{-2i\times i}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

III. Représentation géométrique d'un complexe

▶ **théorème**

À tout nombre complexe $z=a+ib$, on peut faire correspondre un point $M(a\,;b)$ dans un plan complexe $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

On dit que M est le **point image** de z, on note $M(z)$ ou que z est **l'affixe** de M



▶ **définition**

On appelle module de z, la distance OM, c'est-à-dire le nombre positif noté $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\overline{z}}$.

▶ **propriétés des modules**

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

$|-z|=|z|$; $|\overline{z}|=|z|$; $|zz'|=|z|\times|z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right|=\frac{|z|}{|z'|}$; $|z^n|=|z|^n$; $|z+z'|\leq|z|+|z'|$

▶ **théorème**

Pour tous points A et B du plan complexe, on a :

$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$; $AB=|z_B-z_A|$

En particulier : si M est le point image de z, alors : $z_{\overrightarrow{OM}}=z$ et $OM=|z|$.

IV. Quelques démonstrations géométriques

A. Comment déterminer un lieu géométrique de points ?

Méthode

Il s'agit de déterminer un ensemble $\mathscr{E}$ de points $M(z)$ qui vérifient une propriété donnée.

• $|z-z_A|=r$, $(r>0) \Leftrightarrow AM=r$

$\mathscr{E}$ est le cercle de centre A et de rayon r

• $|z-z_A|=|z-z_B| \Leftrightarrow AM=BM$

$\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$

Exemples

Déterminer dans chacun des cas suivants, l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z, vérifiant la condition donnée :

cas 1 : $|2z-i|=1$ cas 2 : $\left|\dfrac{z-2}{z+3i}\right|=1$

cas 1 : $|2z-i|=1 \Leftrightarrow \left|2\left(z-\dfrac{1}{2}i\right)\right|=1 \Leftrightarrow \underbrace{|2|}_{=2}\times\left|z-\dfrac{1}{2}i\right|=1 \Leftrightarrow \left|z-\dfrac{1}{2}i\right|=\dfrac{1}{2}$

Soit $A\left(\dfrac{1}{2}i\right)$, alors l'ensemble $\mathscr{E}$ est le cerce de centre A et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

cas 2 : $\left|\dfrac{z-2}{z+3i}\right|=1 \Leftrightarrow \dfrac{|z-2|}{|z+3i|}=1 \Leftrightarrow |z-2|=|z+3i| \Leftrightarrow |z-2|=|z-(-3i)|$

Soient $B(2)$ et $C(-3i)$ alors $\mathscr{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$

B. Nature d'un triangle

Méthode

Pour montrer qu'un triangle ABC est :

• isocèle en A : $AB=AC \Leftrightarrow |z_B-z_A|=|z_C-z_A|$

• équilatéral : $AB=AC=BC \Leftrightarrow |z_B-z_A|=|z_C-z_A|=|z_C-z_B|$

V. Résolution d'équations polynômes du degré 2

▶ **théorème**

Toute équation polynôme de degré 2 de la forme $az^2+bz+c=0$ avec a, b, c réels $(a\neq 0)$, admet toujours 2 solutions (distinctes ou confondues).

• Si $\Delta>0$, deux solutions réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

• Si $\Delta=0$, une solution réelle double : $z_0=-\dfrac{b}{2a}$

• Si $\Delta<0$, deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$; $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exemple

AMBITION-MATHS

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-2z=-3$

L'équation est équivalente à : $z^2-2z+3=0$. On reconnaît une équation polynôme de degré 2. Calculons Δ :

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times3=-8=8i^2=\left(2i\sqrt{2}\right)^2$

$\Delta<0$, le polynôme a deux racines complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{2-2i\sqrt{2}}{2}=1-i\sqrt{2}$; $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\dfrac{2+2i\sqrt{2}}{2}=1+i\sqrt{2}$

$S=\left\{1-i\sqrt{2}\,;1+i\sqrt{2}\right\}$

AMBITION-MATHS