MODULE MATHS

raccordement: corrigé

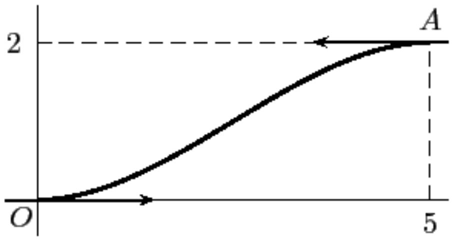
Exercice

Pour faire franchir à des chariots une marche de deux mètres de haut sur une distance horizontale de cinq mètres, on cherche à construire un toboggan.

Dans un repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, la courbe Cf qui est une vue en coupe du toboggan, doit obéir aux contraintes suivantes :

• la courbe passe par les points O et $A\left(5\,;2\right)$;

• les tangentes en O et A sont horizontales (pour se raccorder sans « angle » avec le sol).



1) La fonction f est une fonction polynôme du troisième degré : $x \to ax^3 + bx^2 + cx + d$ et sa courbe représentative est Cf.

Déterminons les coefficients $a\,,b\,,c\,,d$ telle que la courbe Cf représentative de f convienne.

$$O \in Cf \Leftrightarrow f\left(0\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow d = 0$$

$$A \in Cf \Leftrightarrow f\left(5\right) = 2$$
$$\Leftrightarrow a \times 5^3 + b \times 5^2 + c \times 5 + d = 0$$
$$\Leftrightarrow 125a + 25b + 5c + d = 0$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'\left(x\right) = 3ax^2 + 2bx + c$.

On sait aussi que la tangente en O d'abscisse 0 à la courbe Cf est horizontale, ce qui signifie que son coefficient directeur $f'\left(0\right) = 0$ cad : $f'\left(0\right) = 3a \times 0^2 + 2b \times 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$.

De même, la tangente en A à Cf est horizontale, on en déduit que :

$$f'\left(5\right) = 0 \Leftrightarrow 3a \times 5^2 + 2b \times 5 + c = 0 \Leftrightarrow 75a + 10b + c = 0$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 75a+10b+c=0 \\ 125a+25b+5c+d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 75a+10b=0 \quad (\times 5) \\ 125a+25b=2 \quad (\times 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 375a+50b=0 \quad (1) \\ 375a+75b=6 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ 25b=6 \quad (2)-(1) \\ 125a=2-25b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=\dfrac{6}{25} \\ 125a=2-25\times\dfrac{6}{25}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=0 \\ c=0 \\ b=\dfrac{6}{25} \\ a=-\dfrac{4}{125} \end{cases}$$

La fonction f est donc définie par : $f(x)=-\dfrac{4}{125}x^3+\dfrac{6}{25}x^2$.

2) Déterminons les coordonnées du milieu I de $[OA]$:

$$\begin{cases} x_I=\dfrac{x_O+x_A}{2}=\dfrac{0+5}{2}=\dfrac{5}{2} \\ y_I=\dfrac{y_O+y_A}{2}=\dfrac{0+2}{2}=1 \end{cases} \qquad \text{d'où } I\left(\dfrac{5}{2};1\right).$$

Le point I appartient-il à Cf ?

$$f\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{4}{125}\times\left(\frac{5}{2}\right)^3+\frac{6}{25}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{4}{\cancel{125}}\times\frac{\cancel{125}}{8}+\frac{6}{\cancel{25}}\times\frac{\cancel{25}}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\frac{2}{2}=1=y_I$$

Les coordonnées de I vérifient l'équation de f, c'est donc un point de Cf.

La pente en un point de la courbe est le coefficient directeur de la tangente à Cf en ce point.

La pente de Cf en I est le coefficient directeur de la tangente à Cf en I, cette pente est donc égale à $f'\left(\dfrac{5}{2}\right)$:

L'expression de $f'(x)$ est $f'(x)=-\dfrac{12}{125}x^2+\dfrac{12}{25}x$. On en déduit que

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=-\frac{12}{125}\left(\frac{5}{2}\right)^2+\frac{12}{25}\times\frac{5}{2}=-\frac{12}{125}\times\frac{25}{4}+\frac{6}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}=\frac{3}{5}.$$

La pente à Cf vaut $\dfrac{3}{5}$.