Terminale S

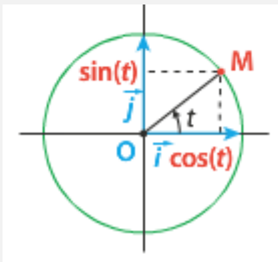
FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

I. Rappels ▶ définitions et formules

Définition

Le plan est muni d'un repère $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$.

À tout nombre t, on associe un point unique M du cercle trigonométrique de centre O. Le point M a pour coordonnées $\left(\cos(t) ; \sin(t)\right)$



- la fonction qui à tout nombre t, associe le nombre $\cos(t)$ est appelée **fonction cosinus :**

$$\cos : t \mapsto \cos(t)$$

- la fonction qui à tout nombre t, associe le nombre $\sin(t)$ est appelée **fonction sinus :**

$$\sin : t \mapsto \sin(t)$$

Remarques

- les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout nombre t, $-1 \leq \cos(t) \leq 1$; $-1 \leq \sin(t) \leq 1$; $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$

Formulaire

▶ **Valeurs particulières**

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

▶ **Cosinus et sinus d'angles associés**

Pour tout nombre réel t, on a :

$\sin(-t) = -\sin(t)$ *et* $\cos(-t) = \cos(t)$

$\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ *et* $\cos(t+\pi) = -\cos(t)$

$\sin(\pi - t) = \sin(t)$ *et* $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$ *et* $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$

▶ **Formules d'addition**

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

▶ **Formules de duplication**

$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$$

▶ **Formules de linéarisation**

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$
$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

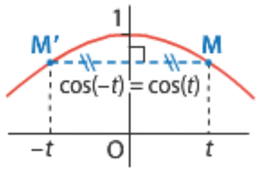
II. Propriétés des fonctions sinus et cosinus

Étude de la parité

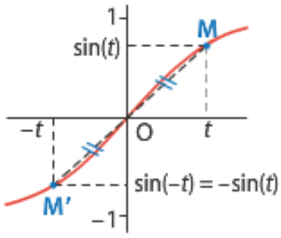
- Pour tout réel t, $\cos(-t) = \cos(t)$: la fonction cosinus est **paire ;** $\sin(-t) = -\sin(t)$: la fonction sinus est **impaire.**

Interprétation graphique

- la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe $(O\,;\vec{j})$



- la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine O



Périodicité

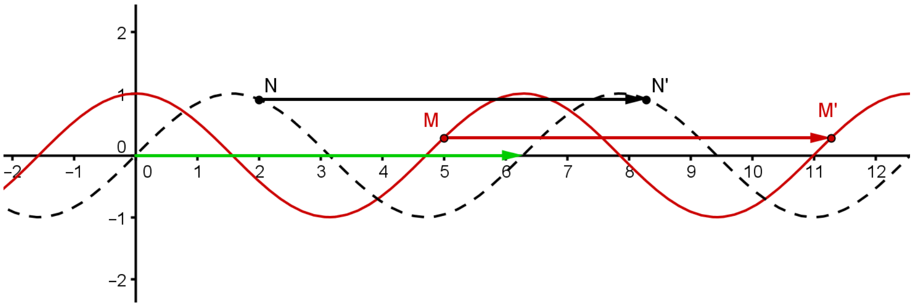
Pour tout nombre t, $\cos(t+2\pi)=\cos(t)$ et $\sin(t+2\pi)=\sin(t)$

On dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π.

Conséquence graphique

Les points M$(t\,;\cos(t))$ et M'$(t+2\pi\,;\cos(t+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'}=2\pi\vec{i}$.

De même, les points N$(t\,;\sin(t))$ et N'$(t+2\pi\,;\sin(t+2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'}=2\pi\vec{i}$



Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur l' intervalle $[-\pi\,;\pi]$. On obtient les courbes sur $\mathbb{R}$ par translation de vecteur $2k\pi\vec{i}$, $k\in\mathbb{Z}$.

III. Étude des fonctions cosinus et sinus

Dérivées

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre t :

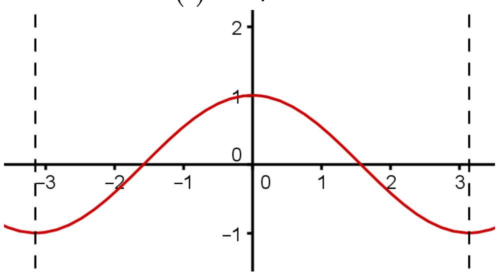
$$\cos'(t)=-\sin(t) \quad \text{et} \quad \sin'(t)=\cos(t)$$

Étude des variations et représentation graphique: fonction cosinus

- signe de $\cos'(t)=-\sin(t)$:

$\sin(t)\geq 0$ pour $0\leq t\leq\pi$. On en déduit que $\cos'(t)\leq 0$ pour $0\leq t\leq\pi$ et $\cos'(t)>0$ pour $-\pi<t<0$

t	$-\pi$		0		π
$\cos'(t)=-\sin(t)$		$+$	0	$-$	
$t\mapsto\cos(t)$	-1	↗	1	↘	-1



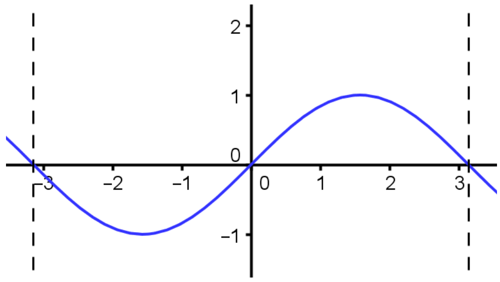
Étude des variations et représentation graphique: fonction sinus

● signe de $\sin'(t)=\cos(t)$:

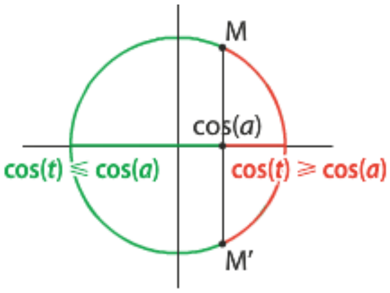
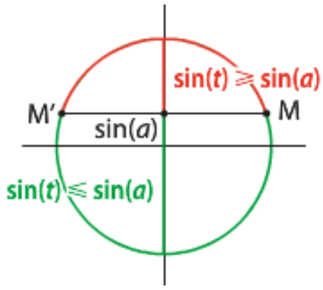
$\cos(t)\geq 0$ pour $-\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}$.

On en déduit que $\sin'(t)\geq 0$ pour $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\sin'(t)<0$ pour $t\in\left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

t	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{2}$		$\dfrac{\pi}{2}$		π
$\cos'(t)=-\sin(t)$		−	0	+	0	−	
$t\mapsto\cos(t)$	0	↘	-1	↗	1	↘	0



IV. Application : résolution d'une inéquation

● deux points d'un cercle trigonométrique d'abscisse $\cos(a)$ (avec $a\neq k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\cos(t)\geq\cos(a)$ et $\cos(t)\leq\cos(a)$ 	● deux points d'un cercle trigonométrique d'ordonnée $\sin(a)$ (avec $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\sin(t)\geq\sin(a)$ et $\sin(t)\leq\sin(a)$ 

Énoncé ▶ résoudre dans $[0;2\pi[$, l'inéquation $\cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right)\geq\dfrac{1}{2}$ et tracer les solutions sur le cercle trigonométrique