Terminale S

Ch.5

LES NOMBRES COMPLEXES
CORRIGÉ ➨ FICHE 3

Exercice 1

Soit $z = x + iy$ avec x et y réels et $Z = \dfrac{z+3i}{z+2}$ avec $z \neq -2$.

1 /

$$Z = \frac{x+i(y+3)}{(x+2)+iy} = \frac{\left[x+i(y+3)\right]\left[(x+2)-iy\right]}{\left[(x+2)+iy\right]\left[(x+2)-iy\right]} = \frac{\left[x(x+2)+y(y+3)\right]+i\left[-xy+(x+2)(y+3)\right]}{(x+2)^2+y^2}$$

$$\boxed{Z = \frac{x(x+2)+y(y+3)}{(x+2)^2+y^2} + i\frac{-xy+(x+2)(y+3)}{(x+2)^2+y^2}}$$

2 / Déterminons l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;y)$ tels que Z soit un imaginaire pur :

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(Z) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x+2)+y(y+3)}{(x+2)^2+y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x(x+2)+y(y+3)}_{\substack{\text{on reconnaît l'équation}\\ \text{du cercle de diamètre}\\ [\text{AB}] \text{ avec A(0;0) et B(-2;-3)}}} = 0 \quad et \quad (x\,;y) \neq (-2\,;0)$$

$$\Leftrightarrow$$

conclusion : L'ensemble des points M est le cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(0\,;0)$ et $B(-2\,;-3)$,privé du point de coordonnées $(-2\,;0)$.

Exercice 2

➡ VRAI ou FAUX ?

proposition 1

Le nombre complexe $(2+i)(1-i)+2(1-i)^2+i$ est égal à $3-4i$: VRAI

$$\begin{aligned}(2+i)(1-i)+2(1-i)^2+i &= (1-i)\left[(2+i)+2(1-i)\right]+i\\ &= (1-i)(4-i)+i\\ &= (4-1)+i(-4-1)+i\\ &= 3-4i\end{aligned}$$

proposition 2

L'inverse de $\dfrac{1+i}{3-i}$ est $1-2i$: VRAI

L'inverse de $\dfrac{1+i}{3-i}$ est : $\dfrac{3-i}{1+i} = \dfrac{(3-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{(3-1)+i(-3-1)}{2} = \dfrac{2-4i}{2} = 1-2i$

proposition 3

i^{2004} est un nombre réel : VRAI

$i^{2004} = \left(i^2\right)^{1002} = (-1)^{1002} = 1$

Exercice 3

On donne : $z_1 = \dfrac{3-4i}{4+7i}$ et $z_2 = \dfrac{3+4i}{4-7i}$.

➨ On observe que : $z_2 = \dfrac{\overline{3-4i}}{\overline{4-7i}} = \overline{\left(\dfrac{3+4i}{4+7i}\right)} = \overline{z}_1$.

On en déduit alors que : $z_1 + z_2 = z_1 + \overline{z}_1 = 2\,\mathrm{Re}(z_1)$ *Pour* $z = x+iy$, $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$ d'où $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$

De même : $z_1 - z_2 = z_1 - \overline{z}_1 = 2i\,\mathrm{Im}(z_1)$ d'où $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

CQFD

Exercice 4

➨ Montrons sans calculs, que chacun des nombres suivants est réel ou imaginaire pur :

a) $z^2 - \overline{z}^2 = z^2 - \overline{\left(z^2\right)} = 2i\,\mathrm{Im}\left(z^2\right)$ d'où $z^2 - \overline{z}^2 \in i\mathbb{R}$

b) $\dfrac{z^3 + \overline{z}^3}{z+\overline{z}} = \dfrac{z^3 + \overline{\left(z^3\right)}}{z+\overline{z}} = \dfrac{2\,\mathrm{Re}\left(z^3\right)}{2\,\mathrm{Re}(z)}$ d'où $\dfrac{z^3 + \overline{z}^3}{z+\overline{z}} \in \mathbb{R}$

c) On rappelle que *pour* $z = x+iy$, $z\overline{z} = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$. on a alors :

$$\frac{z^2 + \overline{z}^2}{z\overline{z}+1} = \frac{z^2 + \overline{\left(z^2\right)}}{z\overline{z}+1} = \frac{2\,\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{\left[\mathrm{Re}(z)\right]^2 + \left[\mathrm{Im}(z)\right]^2} \text{ d'où } \frac{z^2 + \overline{z}^2}{z\overline{z}+1} \in \mathbb{R}$$

Exercice 5

1 / Déterminons l'ensemble des nombres complexes Z tels que $Z + \overline{Z} = 0$: posons $Z = a+ib$ alors

$$\begin{aligned} Z + \overline{Z} = 0 &\Leftrightarrow a+ib+a-ib=0 \\ &\Leftrightarrow 2a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

conclusion : l'ensemble des nombres complexes Z vérifiant $Z + \overline{Z} = 0$ est l'ensemble $i\mathbb{R}$ (ensemble des imaginaires purs).

2 / Résolvons : $\begin{cases} Z + \overline{Z} = 0 \\ Z = z + 1 - i \end{cases}$

On pose $z = a+ib$:

$$\begin{cases} Z + \overline{Z} = 0 \\ Z = z+1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1-i+\overline{(z+1-i)} = 0 \\ Z = a+ib+1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+1-i+\overline{z}+1+i = 0 \\ Z = a+ib+1-i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+\overline{z}+2 = 0 \\ Z = (a+1)+i(b-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2 = 0 \\ Z = (a+1)+i(b-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ Z = i(b-1) \end{cases}$$

D'où $S = \left\{-1+ib, \quad b \in \mathbb{R}\right\}$