TERMINALE S / suites (partie 2)

fiche 3 : préparation BAC

Exercice 1 (Polynésie 2017)

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île et dont le nombre d'individus diminue de façon inquiétante.

Partie A

Au début de l'an 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1-u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

- 1) Calculer, dans ce modèle, le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.
- 2) On admet que, pour tout entier naturel n , u_n et $1-u_n$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.
  - a/ Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.
  - b/ Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$.
  - c/ Déterminer la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?
- 3) Des études permettent d'affirmer que, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction. On souhaite qu'à la fin de son exécution, l'algorithme ci-dessous affiche la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues. Recopier et compléter l'algorithme afin qu'il satisfasse cette exigence.

Variables :	u est un réel n est un entier naturel
Traitement :	u prend la valeur 0,3 n prend la valeur 0 Tant que ... faire :
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher ...

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste plus que 32 tortues. Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (v_n) définie par :

$$\begin{cases} v_{10} = 0,032 \\ v_{n+1} = 1,06v_n(1-v_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel $n \geq 10$, v_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

- 1) Calculer le nombre de tortues au début de l'année 2011 puis de l'année 2012.
- 2) On admet que, dans ce modèle, la suite (v_n) est croissante et convergente. On appelle l sa limite. Montrer que l vérifie : $l = 1,06l(1-l)$
- 3) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Exercice 2 (Amérique du Nord 2017)

Le but de cet exercice est d'étudier les suites de termes positifs dont le premier terme u_0 est strictement supérieur à 1 et possédant la propriété suivante : pour tout $n > 0$, la somme des n premiers termes consécutifs est égale au produit des n premiers termes consécutifs.

On admet qu'une telle suite existe et on la note (u_n) . Elle vérifie donc trois propriétés :

- $u_0 > 1$;
- pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 0$;
- pour tout $n > 0$, $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.

- 1) On choisit $u_0 = 3$. Déterminer u_1 et u_2 .
- 2) Pour tout entier $n > 0$, on note $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_{n-1}$.
On a en particulier $s_1 = u_0$.
  - a/ Vérifier que pour tout entier $n > 0$, $s_{n+1} = s_n + u_n$ et $s_n > 1$
  - b/ En déduire que pour tout entier $n > 0$, $u_n = \frac{s_n}{s_n - 1}$.
  - c/ Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n > 1$.
- 3) À l'aide de l'algorithme ci-contre, on veut calculer le terme u_n pour une valeur de n donnée.
  - a/ Recopier et compléter la partie traitement de l'algorithme ci-contre.

Entrée :	Saisir n Saisir u
Traitement :	s prend la valeur u Pour i allant de 1 à n : u prend la valeur ... s prend la valeur ... Fin Pour
Sortie :	Afficher u

b/ Le tableau ci-dessous donne des valeurs arrondies au millième de u_n pour différentes valeurs de n

n	0	5	10	20	30	40
u_n	3	1,140	1,079	1,043	1,030	1,023

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

- 4) a/ Justifier que pour tout entier $n > 0$, $s_n > n$.
b/ En déduire la limite de la suite (s_n) puis celle de la suite (u_n) .

Exercice 3 (Pondichéry 2017)

On considère deux suites (u_n) et (v_n) ,

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = 2^n$.

Partie A : conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur. Une copie d'écran est donnée ci-dessous :

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

- 1) Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par recopie vers le bas les termes des deux suites ?
- 2) Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13, Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	13	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : étude de la suite (u_n)

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
- 2) Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- 3) Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

- 1) Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

- 2) On admet que pour tout entier $n \geq 4$, on a : $0 \leq \frac{n}{2^n} \leq \frac{1}{n}$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.