INTÉGRATION(partie 1) ➡ fiche synthèse

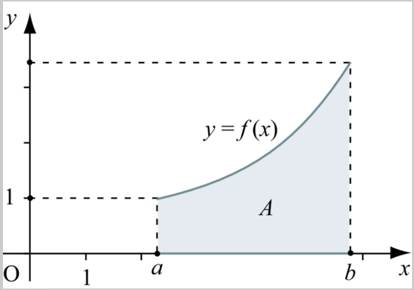
I. Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$

A/ Cas d'une fonction positive

▶ définition

• On appelle « domaine situé sous la courbe Cf » l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant :

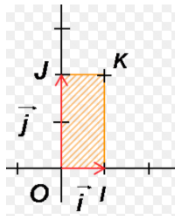
$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$



• Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$.

Le réel noté $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par la courbe Cf , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.
a et b sont les bornes de l'intervalle.

Remarques



• L'aire est exprimée en unité d'aire, l'unité d'aire étant définie comme l'aire du rectangle de 1 unité sur chacun des deux axes du repère orthogonal.

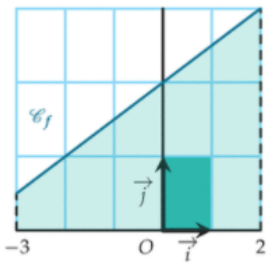
• On peut interpréter $\int_a^b f(x)dx$ somme la somme des aires $f(x)\times dx$ des rectangles infinitésimaux de largeur dx et de hauteur $f(x)$ *(voir activité introduction)*

• $\int_a^a f(x)dx = 0$ puisque l'aire d'un segment est nulle.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[-3\,;2]$ par : $f(x)=\dfrac{x}{2}+3$.

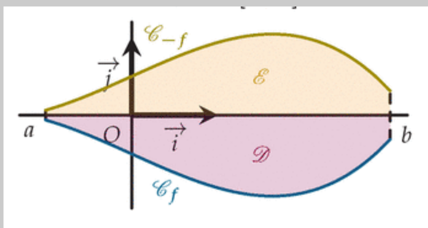
Le domaine colorié est un trapèze dont l'aire est : $\int_{-3}^{2} f(x)dx = \dfrac{0{,}5+3}{2}\times 5 = 8{,}75 u.a$



B/ Autres cas

▶ définition

Soit f une fonction continue et négative sur $[a\,;b]$.



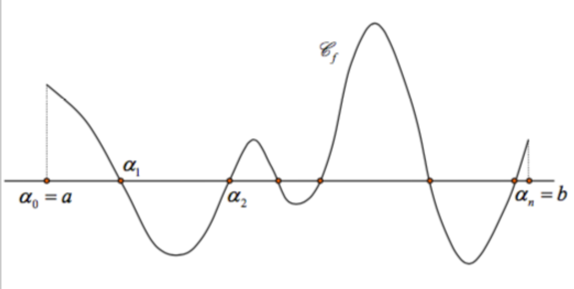
$$\int_a^b f(x)dx = -\mathscr{A}(D)$$

où D est le domaine délimité par Cf , l'axe (Ox) et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

▶ définition (cas général)

On suppose que la fonction f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $\left]a\,;b\right[$.

Notons $\alpha_0 = a\,;\alpha_n = b$ et $\alpha_1\,;\alpha_2\,;\ldots;\alpha_{n-1}$ les $n-1$ points de $\left]a\,;b\right[$ où f s'annule. On découpe ainsi l'intervalle $\left[a\,;b\right]$ en intervalles où la fonction f garde un signe constant.



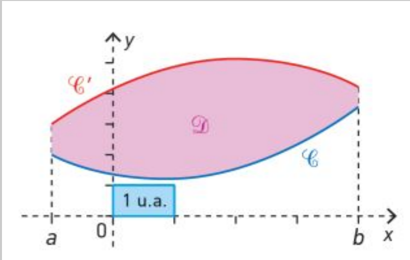
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha_0=a}^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_{n-2}}^{\alpha_{n-1}} f(x)dx + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n=b} f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(x)dx\right)$$

▶ propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ telles que $f \le g$ sur $\left[a\,;b\right]$. Soient Cf et Cg leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.

L'aire du domaine délimité par les courbes Cf et Cg et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire, est égale à :

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$



II. Propriétés

▶ Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\left[a\,;b\right]$ et $c \in \left[a\,;b\right]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

▶ Conséquence

$$\int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$$

Remarque

On a en effet d'après la relation de Chasles : $\int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0 \Leftrightarrow \int_a^c f(x)dx = -\int_c^a f(x)dx$

▶ Linéarité

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \mu\int_a^b g(x)dx$$

▶ **Positivité**

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$ avec $a \leq b$.

- $\forall x \in [a\,;b],\ f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$
- $\forall x \in [a\,;b],\ f(x) \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq 0$

▶ **Conservation de l'ordre**

$$\forall x \in [a\,;b],\ f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

▶ **Inégalité de la moyenne**

$$\forall x \in [a\,;b],\quad m \leq f(x) \leq M \Rightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

▶ **Valeur moyenne**

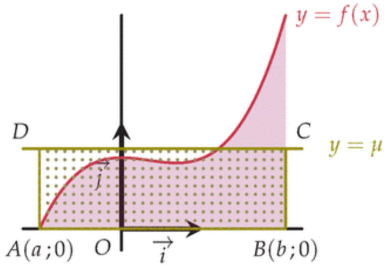
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Remarque

Dans le cas où f est positive et continue sur $[a\,;b]$, la valeur moyenne de f entre a et b représente la hauteur du rectangle construit sur l'intervalle $[a\,;b]$, telle que l'aire de ce rectangle $ABCD$ soit égale, en ua, à l'aire du domaine limité par la courbe Cf, l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

En effet, on a : $\mu(b-a) = \int_a^b f(x)dx$



III. Calcul intégral : l'essentiel

▶ **définition**

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

▶ **propriété (calcul d'une intégrale à l'aide des primitives)**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$