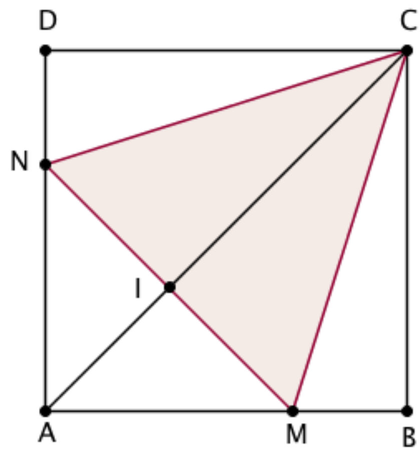
MODULE MATHS

tâche complexe et trigo(2)

Exercice

$ABCD$ est un carré, M et N sont deux points de $[AB]$ et de $[AD]$ respectivement tels que $AM = AN$.



1) Déterminons la longueur AM pour que CMN soit équilatéral :
Considérons que la carré a pour côté 1.
Notons $AM = x$, on a alors $DN = 1 - x$.

D'après le th. de Pythagore dans le triangle DNC rectangle en D, on a :

$$\begin{aligned} NC^2 &= DN^2 + DC^2 \\ &= (1-x)^2 + 1^2 \\ &= 1 - 2x + x^2 + 1^2 \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

Par symétrie par rapport à la droite (AC), on a aussi :

$$MC^2 = x^2 - 2x + 2.$$

D'après le th.de Pythagore dans le triangle AMN rectangle en A, on a :

$$\begin{aligned} MN^2 &= AN^2 + AM^2 \\ &= x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 \end{aligned}$$

Le triangle CMN est équilatéral ssi

$$\begin{aligned} 2x^2 = x^2 - 2x + 2 &\Leftrightarrow 2x^2 - x^2 + 2x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \end{aligned}$$

On reconnaît un polynôme de degré 2. Calculons Δ : $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-2) = 4 + 8 = 12$

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2-2\sqrt{3}}{2} = -1-\sqrt{3}$ (valeur exclue car $x \geq 0$) ; $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2+2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}-1$.

Conclusion : pour $AM = \sqrt{3} - 1$, le triangle CMN est équilatéral.

2) Déterminons les valeurs exactes de $\tan\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$:

Calculons d'abord $\tan\dfrac{5\pi}{12}$:

- AMN triangle isocèle rectangle alors $\left(\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{NM}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
- (AC) bissectrice de $\widehat{DAB}$ alors $\left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AN}\right) = \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

• Dans le triangle AIN : $\underbrace{\left(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AN}\right)}_{=\frac{\pi}{4}}+\underbrace{\left(\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{NI}\right)}_{=\frac{\pi}{4}}+\left(\overrightarrow{IN}\,;\overrightarrow{IA}\right)=\pi\left[2\pi\right]$, d'où $\left(\overrightarrow{IN}\,;\overrightarrow{IA}\right)=\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$

• NMC triangle équilatéral signifie que $\left(\overrightarrow{NM}\,;\overrightarrow{NC}\right)=\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]$

• $\left(\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{ND}\right)=\left(\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{NM}\right)+\left(\overrightarrow{NM}\,;\overrightarrow{NC}\right)+\left(\overrightarrow{NC}\,;\overrightarrow{ND}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{NC}\,;\overrightarrow{ND}\right)\left[2\pi\right]=\pi\left[2\pi\right]$

d'où $\left(\overrightarrow{NC}\,;\overrightarrow{ND}\right)=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\left[2\pi\right]=\frac{5\pi}{12}\left[2\pi\right]$

• Dans le triangle rectangle DNC :

$$\tan\left(\overrightarrow{NC}\,;\overrightarrow{ND}\right)=\frac{DC}{DN}\Leftrightarrow\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{1-\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

Calculons à présent $\tan\frac{\pi}{12}$:

$$\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}=\frac{6-2\sqrt{12}+2}{6-2}=\frac{8-4\sqrt{3}}{4}=2-\sqrt{3}$$

On a enfin :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$