

Se tester ...

La fonction exponentielle

Exercice 1

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice, l'évolution de la concentration plasmatique d'une même dose de médicament, chez un patient, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est : $f(t) = 20e^{-0,1t}$ avec $t \in [0 ; +\infty[$.

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

- 1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale. Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.
- 2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$. Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ($\mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$) au bout de t heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est : $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$ avec $t \in [0 ; +\infty[$.

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à : $g(0) = 0 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$.

- 1) Démontrer que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; +\infty[$, on a : $g'(t) = 20e^{-t}(1 - 0,1e^{0,9t})$.
- 2) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Exercice 2

Pour tout entier k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x + 1)e^{kx}$.

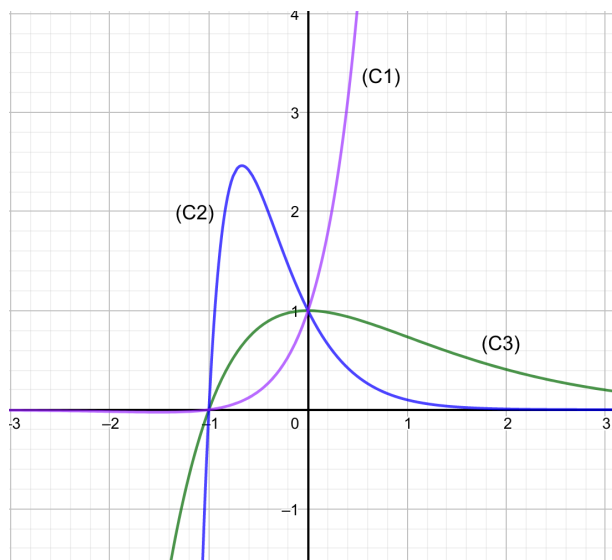
On note C_k la courbe représentative de la fonction f_k .

Partie A : étude des courbes C_0 et C_{-1}

- 1) Quelle est la nature de la fonction f_0 ?
- 2) La fonction f_{-1} est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_{-1}(x) = (x + 1)e^{-x}$.
Étudier les variations de la fonction f_{-1} .
- 3) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C_0 et C_{-1} . On note A et B ces deux points d'intersection.

Partie B : étude des courbes C_k

- 1) Vérifier que pour tout entier k , les points A et B appartiennent à la courbe C_k .
- 2) a/ Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.
b/ En déduire, pour un entier k donné, les positions relatives des courbes C_k et C_{k+1} .
- 3) a/ Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.
b/ En déduire le sens de variation de la fonction f_k selon les valeurs non nulles de k (on distinguera les cas $k > 0$ et $k < 0$).
- 4) Le graphique ci-dessous représente trois courbes correspondant à trois valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers -1 , -3 et 2 . Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

**Exercice 3**

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, une courbe C_f et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0; 1)$ et $(-1; 3)$.

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est C_f . On suppose de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}.$$

- 1) a/ Justifier que la courbe C_f passe par le point A .
b/ Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB) .
c/ Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
d/ On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe C_f au point A . Déterminer la valeur du réel a .

- 2) D'après la question précédente, pour tout réel x ,

$$f'(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \text{ .. et.. } f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

a/ Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1; 0]$, $f(x) > 0$.

b/ Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f'(x) > 0$.

c/ Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

...Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2 \times 10^{-2}$

