SECONDE

Ch.10 Le second degré

I. La fonction carré

1 / définition

définition
la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel x, associe son carré x^2, est appelée **fonction carré**.

Exemple : si on note f la fonction carré : $f(2)=2^2=4$; $f(-5)=(-5)^2=25$.
Pour tout nombre x : $f(x)=x^2$.

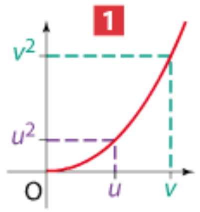
Remarque : 3 a une seule image par f : 9 mais 9 a deux antécédents 3 et -3.

2 / sens de variation de la fonction carré

propriété
la fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

démonstration
u et v désignent deux nombres réels tels que $u \leq v$, c'est-à-dire tels que $u - v \leq 0$.
On étudie alors le signe de $f(u) - f(v)$ dans chacun des cas suivants :

1 u et v sont **positifs**.



$f(u)-f(v) = u^2 - v^2 = \underbrace{(u-v)}_{\text{négatif}}\underbrace{(u+v)}_{\text{positif}}$

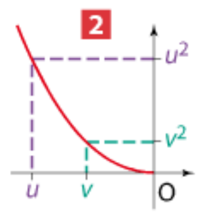
donc $f(u)-f(v) \leq 0$ soit $f(u) \leq f(v)$.

Ainsi, **pour tous réels positifs u et v,**

si $u \leq v$, alors $u^2 \leq v^2$

La fonction carrée est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

2 u et v sont **négatifs**.



$f(u)-f(v) = u^2 - v^2 = \underbrace{(u-v)}_{\text{négatif}}\underbrace{(u+v)}_{\text{négatif}}$

donc $f(u)-f(v) \geq 0$ soit $f(u) \geq f(v)$.

Ainsi, **pour tous réels négatifs u et v,**

si $u \leq v$, alors $u^2 \geq v^2$

La fonction carrée est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$.

➔ **Tableau de variation**

valeurs de x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction carré	↘	0	↗

propriété (conséquence de la pté précédente):
● deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre. Autrement dit, la fonction carré conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$ .et décroissante sur $]-\infty ; 0]$.
●deux nombres négatifs et leurs carrés sont rangés dans l'ordre contraire. Autrement dit, la fonction carré inverse l'ordre sur $]-\infty ; 0]$.

exercice 1: comparer des carrés
Énoncé : dans chaque cas, comparer les nombres suivants sans effectuer aucun calcul :

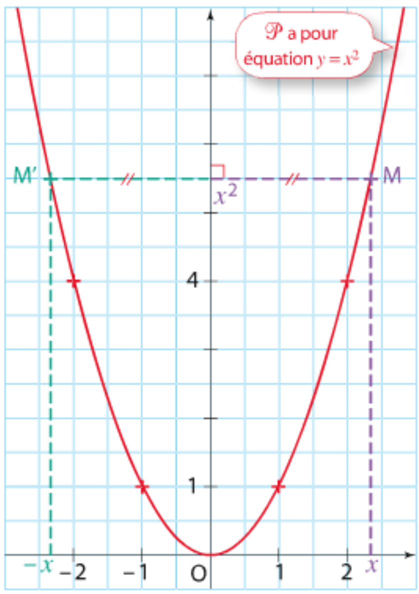
a) $2{,}3^2$ et $2{,}15^2$ b) $(-1{,}002)^2$ et $(-0{,}999)^2$

Solution
a) La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$ donc elle conserve l'ordre sur cet intervalle.
2,3 et 2,15 sont deux nombres positifs tels que 2,15 ≤ 2,3. On ne déduit que $2{,}15^2 \leq 2{,}3^2$

b) La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ donc elle inverse l'ordre sur cet intervalle.
$-1{,}002$ et $-0{,}999$ sont deux nombres négatifs tels que $-1{,}002 \leq -0{,}999$.
On ne déduit que et $(-1{,}002)^2 \geq (-0{,}999)^2$.

2 / représentation graphique de la fonction carré

En plaçant dans un repère orthonormé (O, I, J) les points de coordonnées $(x ; x^2)$, on obtient la représentation graphique de la fonction carré.



définition
Dans un repère orthonormé d'origine O,
la représentation graphique de la fonction carré est appelée **parabole de sommet O**.

Remarque : plus généralement, on appelle parabole, toute courbe représentative d'une fonction de la forme : $x \mapsto a^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$.

Observations graphiques
❶ On observe que le point "le plus bas" de la courbe est le point $O(0 ; 0)$. **Le minimum de la fonction carré est** 0 **et il est atteint en** $x = 0$ **.**

❷ Pour tout réel x , x et $(-x)$ ont le même carré, soit $x^2 = (-x)^2$. Graphiquement, la parabole $\mathcal{P}$ représentant la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

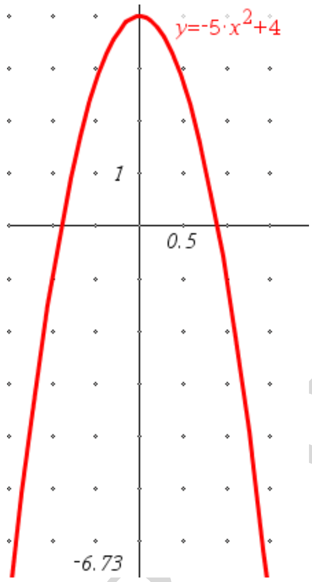
Remarque : plus généralement, on dit qu'une fonction est paire. si pour tout $x \in Df$, on a : $f(x) = f(-x)$.
C'est le cas de la fonction carré.

exercice 2 : sens de variation d'une fonction
Énoncé : soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 4$.

a) Conjecturer le sens de variation de la fonction f et sa parité à l'aide de la calculatrice.
b) Démontrer les conjectures.

Solution

La calculatrice donne la courbe ci-contre :
l'observation de la courbe fait penser que la fonction f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.
L'axe des ordonnées semble être un axe de symétrie pour la parabole $\mathcal{P}$



Démonstration

- Soit a et b deux réels positifs tels que $a \leq b$, alors:

$a^2 \leq b^2$ (la fonction carré conserve l'ordre)

$-5a^2 \geq -5b^2$ (on multiplie par un nombre négatif, donc l'ordre est inversé)

$-5a^2+4 \geq -5b^2+4$ (on ajoute un même nombre de chaque côté de l'inégalité, l'ordre est onservé)

d'où, $f(a) \geq f(b)$: la fonction est donc décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

- Soit a et b deux réels négatifs tels que $a \leq b$, alors:

$a^2 \geq b^2$ (la fonction carré inverse l'ordre)

$-5a^2 \leq -5b^2$ (on multiplie par un nombre négatif, donc l'ordre est inversé)

$-5a^2+4 \leq -5b^2+4$ (on ajoute un même nombre de chaque côté de l'inégalité, l'ordre est onservé)

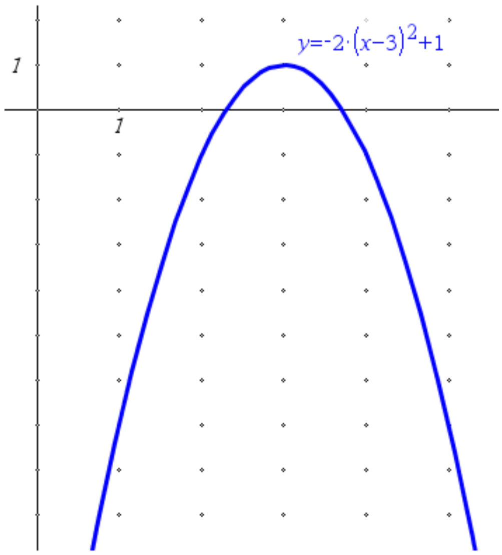
d'où, $f(a) \leq f(b)$: la fonction est donc croissante sur $]-\infty\,;0]$.

exercice 3: recherche d'un extrémum

Énoncé : soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2(x-3)^2+1$.

a) Rechercher un extrémum de la fonction g à l'aide de la calculatrice.

b) Démontrer le résultat observé.



Solution

a) On observe que la courbe a son point "le plus haut" pour $x=3$ et que la valeur correspondante pour g est 1.
il semble donc que la fonction g a pour maximum 1 et qu'il est atteint en $x=3$.

b) **Démonstration**

- Pour tout réel x, on sait que : $(x-3)^2 \geq 0$

Donc : $-2(x-3)^2 \leq 0$ (on multiplie par -2, changement de sens de l'inégalité)

$-2(x-3)^2+1 \leq 1$ (on ajoute un même nombre de chaque côté de l'inégalité, l'ordre est conservé)

- Pour $x=3$, $g(3)=1$

Conclusion

$g(3)=1$ et pour tout $x \neq 3$, $g(x) \leq 1$ donc 1 est un maximum de la fonction g et il est atteint en $x=3$.

II. Fonction polynôme du second degré

1 / définition

définition
On appelle polynôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ pouvant s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

remarque : on dit aussi dans ce cas que f est un trinôme du second degré.

Exemples
- $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ est un polynôme du second degré $(a = 2\,; b = -5\,; c = 1)$
- $g(x) = -3(x+1)^2 + 4$ est un polynôme du second degré. En effet : $g(x) = -3(x^2 + 2x + 1) + 4 = -3x^2 - 6x - 3 + 4 = -3x^2 - 6x + 1$ $(a = -3\,; b = -6\,; c = 1)$
- $h(x) = \frac{1}{2}(4x-1)(x+2)$ est un polynôme de degré 2. En effet :
  $h(x) = \frac{1}{2}(4x-1)(x+2) = \frac{1}{2}(4x^2 + 8x - x - 2) = \frac{1}{2}(4x^2 + 7x - 2) = 2x^2 + \frac{7}{2}x - 1$; $\left(a = 2\,; b = \frac{7}{2}\,; c = -1\right)$
- $k(x) = 2x^2 + 3$ est un polynôme de degré 2. En effet : $(a = 2\,; b = 0\,; c = 3)$
- $l(x) = -5x^2 - x$ est un polynôme de degré 2. En effet : $(a = -5\,; b = -1\,; c = 0)$.
- $m(x) = -5x - 1$ est un polynôme de degré 2 car ici $a = 0$.

2 / étude des variations d'une fonction polynôme de degré 2

2.1 ➤ forme canonique : définition

propriétés
- Une expression de la forme $a(x-\alpha)^2 + \beta$, $a \neq 0$, s'appelle forme canonique d'un polynôme de degré 2.
- Toute fonction polynôme de degré 2 admet une forme canonique.

Exemples
- $A(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 5$ est la forme canonique d'un polynôme de degré 2 avec : $a = \frac{1}{2}$; $\alpha = 3$; $\beta = 5$
- $B(x) = (x-2)^2 - 1$ est la forme canonique d'un polynôme de degré 2 avec : $a = 1$; $\alpha = 2$; $\beta = -1$
- $C(x) = -\left(x + \frac{3}{5}\right)^2 + 11$ est la forme canonique d'un polynôme de degré 2 avec : $a = -1$; $\alpha = -\frac{3}{5}$; $\beta = 11$
- $D(x) = 3x^2 - 4 = 3(x-0)^2 - 4$ est la forme canonique d'un polynôme de degré 2 avec : $a = 3$; $\alpha = 0$; $\beta = -4$.

2.2 ➤ forme canonique : méthode

Comment obtenir la forme canonique d'un polynôme de degré 2 à partir de sa forme développée réduite ?
1 / on factorise par a ;
2 / on identifie le début d'une identité remarquable avec les termes contenant « du x ».

Exemple

$P(x)=2x^2-12x+5$

$=2\left(x^2-6x+\dfrac{5}{2}\right)$ $\quad x^2-6x=\underbrace{x^2}_{a^2}\underbrace{-2\times x\times 3}_{-2\times a\times b}$ *est le début de* $\underbrace{(x-3)^2}_{(a-b)^2}$

$=2\left[(x-3)^2-9+\dfrac{5}{2}\right]$ $\quad (x-3)^2=x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-6x=(x-3)^2-9$

$=2\left[(x-3)^2-\dfrac{18}{2}+\dfrac{5}{2}\right]$

$=2\left[(x-3)^2-\dfrac{13}{2}\right]$

$=\boxed{2(x-3)^2-13}$

exercice 4 : identifier, déterminer la forme canonique d'un polynôme de degré 2.

➤ dans chaque cas :

- si l'on donne la forme canonique d'un polynôme de degré 2, donner les valeurs de $a\,;\alpha\,;\beta$
- sinon, déterminer l'écriture sous forme canonique de ce polynôme puis identifier les valeurs de $a\,;\alpha\,;\beta$.

a / $f(x)=-5x^2+3x+4$ b / $g(x)=7x^2-1$ c / $g(x)=\dfrac{1}{3}x^2+2x$ d / $h(x)=x^2+\dfrac{3}{2}x+1$

2.3 ➤ résoudre une équation polynôme de degré 2 : méthode

Si le polynôme P est donné sous forme développée :

1 / on détermine la forme canonique du polynôme ;

2 / à partir de la forme canonique, on détermine, si elle existe, la forme factorisée de ce polynôme

3 / on résout $P(x)=0$ en utilisant le théorème : « un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul ».

Exemple résoudre l'équation : $2x^2-9x-5=0$.

1 / Déterminons la forme canonique de $P(x)=2x^2-9x-5$.

$P(x)=2\left(x^2-\dfrac{9}{2}x-\dfrac{5}{2}\right)$

$=2\left[\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{81}{16}-\dfrac{40}{16}\right]$

$=\boxed{2\left[\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{121}{16}\right]\quad(*)}$ *on remarque ici une identité remarquable type* A^2-B^2 : $\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{121}{16}=\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2=\left(\dfrac{11}{4}\right)^2$

$=2\left(x-\dfrac{9}{4}\right)^2-\dfrac{121}{8}$

2 / On part de l'étape $(*)$ pour déterminer la forme factorisée de $P(x)$:

$$P(x)=2\left[\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2\right]$$

$$=2\left(x-\frac{9}{4}-\frac{11}{4}\right)\left(x-\frac{9}{4}+\frac{11}{4}\right)$$

$$=2\left(x-\frac{20}{4}\right)\left(x+\frac{2}{4}\right)$$

$$=\boxed{2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \quad \textit{forme factorisée}$$

3 / On résout $P(x)=0$:

$$P(x)=0 \Leftrightarrow 2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-5=0 \quad ou \quad x+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=5 \quad ou \quad x=-\frac{1}{2}}$$

exercice 5 : résoudre (si possible), une équation polynôme de degré 2.

1 / Résoudre dans chaque cas l'équation proposée :

a / $A(x)=3x^2-5x+2=0$ b / $B(x)=4x^2+12x+9=0$ c / $C(x)=3x^2-2x+1=0$

2 / Représenter sur la calculatrice chacune de ces fonctions polynômes. Les résultats obtenus étaient-t-ils prévisibles ? Expliquer.

2.3 ➤ variations d'une fonction polynôme de degré 2

Exemple : déterminer les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=2x^2-9x-5$.

On a vu précédemment que $P(x)=2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{121}{8}$.

On peut alors établir le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$ $\qquad \frac{9}{4} \qquad$ $+\infty$	
$x\mapsto x-\frac{9}{4}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	Fonction affine et $a=1$ donc $a>0$; la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$
$x\mapsto \left(x-\frac{9}{4}\right)^2$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	On sait que la fonction carré est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ donc elle renverse l'ordre ; elle est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc elle conserve l'ordre.
$x\mapsto 2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2$	$\searrow$ 0 $\nearrow$	Multiplication par 2, ordre conservé.
$x\mapsto 2\left(x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{121}{8}$	$\searrow$ $-\frac{121}{8}$ $\nearrow$	On ajoute $-\frac{121}{8}$, ordre conservé.

propriétés

• Une fonction polynôme de degré 2 a les mêmes variations que la fonction carré si $a>0$,
elle a des variations contraires si $a<0$.

• Sa représentation graphique est une parabole :
$\rightarrow$ tournée vers le haut si $a>0$ $\rightarrow$ tournée vers le bas si $a<0$

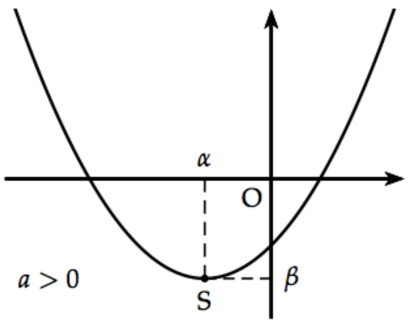
• $a>0$

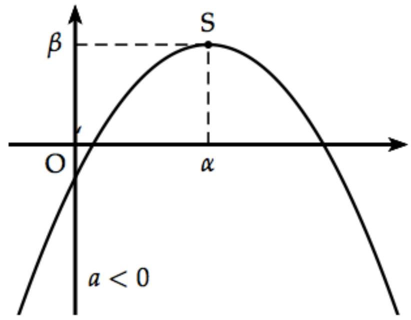
x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

• $a<0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$

remarque : on démontrera en classe de Première que $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=P\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.





remarques :

• si l'expression de la fonction trinôme est donnée sous forme canonique, alors on obtient rapidement les coordonnées du sommet S de la parabole : $S(\alpha\,,\beta)$

• si l'expression de la fonction trinôme est donnée sous forme développée, alors on obtient les coordonnées du sommet S de la parabole en calculant : $-\dfrac{b}{2a}=\alpha$ et $P\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\beta$. Ainsi les coordonnées de S sont : $S\left(-\dfrac{b}{2a}\,,P\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$.

• La droite $x=-\dfrac{b}{2a}$ (ou $x=\alpha$) est un axe de symétrie de la parabole.

exercice 6 : variations d'une fonction polynôme de degré 2

1 / En utilisant les propriétés du cours, dresser le tableau de variation des fonctions polynômes de degré 2 suivantes, en justifiant la démarche (on déterminera les coordonnées du sommet et on donnera le sens de la parabole (tournée vers le haut ou vers le bas)

a / $f(x)=3\left(x-\dfrac{2}{5}\right)^2+1$ b / $g(x)=2x^2+x+1$

2 / Vérifier les résultats à l'aide des fonctionnalités de la calculatrice.