

# Préparation bac 2018 (3)/ spécialité maths

## Arithmétique

### Exercice 1

#### Partie A

On considère l'équation (E) :  $25x - 108y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.

- Vérifier que le couple (13 ; 3) est solution de cette équation.
- Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

#### Partie B

**Prérequis :** petit théorème de Fermat : « si  $p$  est un nombre premier et  $a$  non divisible par  $p$ , alors  $a^{p-1}$  est congru à 1 modulo  $p$  que l'on note :  $a^{p-1} \equiv 1 [p]$ .

Dans cette partie,  $a$  désigne un entier naturel et les nombres  $c$  et  $g$  sont des entiers naturels vérifiant la relation :

$$25g - 108c = 1.$$

- Soit  $x$  un entier naturel. Démontrer que si  $x \equiv a [7]$  et  $x \equiv a [19]$  alors  $x \equiv a [133]$ .
- On suppose que  $a$  n'est pas un multiple de 7.  
Démontrer que  $a^6 \equiv 1 [7]$  puis que  $a^{108} \equiv 1 [7]$ .  
En déduire que  $(a^{25})^g \equiv a [7]$ .
- On suppose que  $a$  est un multiple de 7. Démontrer que  $(a^{25})^g \equiv a [7]$ .
- On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $(a^{25})^g \equiv a [19]$ . Démontrer que  $(a^{25})^g \equiv a [133]$ .

#### Partie C

On note  $A$  l'ensemble des entiers naturels  $a$  tels que :  $1 \leq a \leq 26$ .

Un message, constitué d'entiers naturels appartenant à  $A$ , est codé puis décodé.

La phrase de codage consiste à associer, à chaque entier  $a$  de  $A$ , l'entier  $r$  tel que  $a^{25} \equiv r [133]$  avec  $0 \leq r < 133$ .

La phrase de décodage consiste à associer à  $r$ , l'entier  $r_1$  tel que  $r^{13} \equiv r_1 [133]$  avec  $0 \leq r_1 < 133$ .

- Justifier que  $r_1 \equiv a [133]$ .
- Un message codé conduit à la suite de deux entiers suivants : 128 59.  
Décoder ce message.

### Exercice 2

On considère la suite définie par son premier terme  $u_0 = 3$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par :  $u_{n+1} = 2u_n + 6$

- Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 9 \times 2^n - 6$ .
- Soit  $(v_n)$  la suite d'entiers définie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , par :  $v_n = \frac{u_n}{6}$ .

On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $v_n$  est un nombre premier »

Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- 3) a/ Démontrer que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_{n+1} - 2v_n = 1$ .  
 b/ En déduire que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $v_n$  et  $v_{n+1}$  sont premiers entre eux.  
 c/ En déduire, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , le PGCD de  $u_n$  et  $u_{n+1}$ .
- 4) a/ Vérifier que  $2^4 \equiv 1 [5]$ .  
 b/ En déduire que si  $n$  est de la forme  $4k + 2$  avec  $k$  entier naturel, alors  $u_n$  est divisible par 5.  
 c/ Le nombre  $u_n$  est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel  $n$  ? Justifier.

### Exercice 3

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergements : l'hébergement A et l'hébergement B. Une nuit en hébergement A coûte 24€ et une nuit en hébergement B coûte 45€. Il se rappelle que le coût de sa réservation est de 438€.

On souhaite retrouver les nombres  $x$  et  $y$  de nuitées passées respectivement e, hébergement A et en hébergement B.

- 1) a/ Montrer que les nombres  $x$  et  $y$  sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.  
 b/ recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples  $(x ; y)$  possibles.

<b>Entrée :</b>	$x$ et $y$ sont des nombres
<b>Traitement :</b>	Pour $x$ variant de 0 ... (1) Pour $y$ variant de 0 ... (2) Si ... (3) Afficher $x$ et $y$ Fin Si Fin Pour Fin Pour
<b>Fin traitement</b>	

- 2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
- 3) a/ Justifier que l'équation  $8x + 15y = 1$  admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.  
 b/ Déterminer une telle solution.  
 c/ Résoudre l'équation (E) :  $8x + 15y = 1$  où  $x$  et  $y$  sont des entiers relatifs.
- 4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A  
 Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B. Calculer ces nombres.