FICHE 1 ⁓ *échantillonnage*

Exercice 1

Dans une fabrique de chocolat, une machine met en forme des tablettes. Elle fabrique des tablettes imparfaites avec une probabilité 0,025.

Quand une tablette est parfaitement formée, elle est vendue 2€. Lorsqu'elle est imparfaite, elle est vendue en vrac 0,75€ dans le magasin d'usine. Chaque jour, l'usine produit 20 000 tablettes de chocolat.

1) Déterminer un intervalle de fluctuation de fluctuation de la fréquence de tablettes imparfaites au seuil de 95%.

2) On suppose que toute la production est vendue.
Déterminer un intervalle de fluctuation du chiffre d'affaire quotidien réalisé au seuil de 95%.

Exercice 2

On cherche à savoir si un dé cubique est équilibré : pour cela, on le lance 1000 fois et on s'intéresse au nombre de 1 obtenus.

Dans l'hypothèse où on lance 1000 fois un dé équilibré, un intervalle de fluctuation de la fréquence de 1 obtenus au seuil de 95% est $\left[0{,}143\,;0{,}190\right]$.

➡ Que peut-on dire du dé si l'on obtient :

a/ 200 fois le nombre 1 ? b/ 150 fois le nombre 1 ?

Exercice 3

Un maire souhaite lancer un sondage pour déterminer si les habitants de sa commune approuvent un projet immobilier au seuil de confiance de 95%.

1) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 1% près de la proportion de personnes favorables ?

2) Combien de personnes doit-il sonder s'il veut avoir une estimation à 0,1% près de la proportion de personnes favorables ?

Exercice 4

Un laboratoire pharmaceutique souhaite tester l'efficacité d'un médicament destiné à soulager les maux de tête.

Il est administré à 579 patients volontaires. Parmi eux, 370 ont noté une amélioration de leur état de santé.

1) Déterminer une estimation du taux d'efficacité de ce médicament sous la forme d'un intervalle de confiance au seuil de 95%.

2) Que penser de l'efficacité de ce médicament ?

3) On souhaite comparer le médicament avec un placebo. Dans le cas de migraines l'administration d'un placebo (sans agent actif) soulage les patients dans 60% des cas. Peut-on affirmer, au seuil de 95%, que ce médicament a une utilité ?

Exercice 5

En étudiant une maladie dans la population d'un pays, on a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre ($ng \cdot ml^{-1}$), d'une substance gamma présente dans le sang, est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui ne sont pas touchées. Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang à jeun. Les données montrent que 82% des patients malades ont un dépistage positif.

Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.

On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'a pas été effectuée à jeun.

Le dépistage se révèle positif pour 74% d'entre elles.

➡ Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

Exercice 6

Une entreprise annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans sa production est égal à 1%.

Afin de vérifier cette affirmation, 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont défectueux.

➡ Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise ? Justifier.

Exercice 7

D'après une réglementation sur les cultures OGM, le seuil acceptable de contamination des cultures biologiques par des cultures OGM pour être qualifiées de « sans OGM » est de 0,9%.

Après une analyse faite en laboratoire, Bernard, producteur de produits biologiques, a été informé que sur les 1000 plants de maïs testés dans son champ, 35 provenaient d'une culture OGM.

➡ Préparer sa défense.

Exercice 8 (ROC)

Soit n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1, et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p.

On note $F_n = \frac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

➡ En déduire que l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Exercice 9

On étudie un modèle de climatiseur d'automobile composé d'un module mécanique et d'un module électronique. Si un module subit une panne, il est changé.

Partie A

Un enseigne d'entretien automobile a constaté, au moyen d'une étude statistique, que la durée de fonctionnement (en mois) du module mécanique peut être modélisé par une variable aléatoire D qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type σ.

1) Déterminer l'arrondi à 10^{-4} de σ sachant que le service statistique indique que $p(D \geq 48) = 0{,}7977$.

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\sigma = 2{,}4$.

2) Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module mécanique soit comprise entre 45 et 52 mois.

3) Déterminer la probabilité que le module mécanique d'un climatiseur ayant fonctionné depuis 48 mois fonctionne encore au moins 6 mois.

Partie B : Étude des pannes d'origine électronique

Sur le même modèle de climatiseur, l'enseigne d'entretien automobile a constaté que la durée de fonctionnement (en mois) du module électronique peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur exacte de λ, sachant que le service statistique indique que $p(0 \leq T \leq 24) = 0{,}03$

Pour la suite de cet exercice, on prendra $\lambda = 0{,}00127$.

2) Déterminer la probabilité que la durée de fonctionnement du module électronique soit comprise entre 24 et 48 mois.

3) a/ Démontrer que, pour tous réels t et h positifs, on a : $p_{(T \geq t)}(T \geq t+h) = p(T \geq h)$

c'est-à-dire que la variable aléatoire T est sans vieillissement.

b/ Le module électronique du climatiseur fonctionne depuis 36 mois.
Déterminer la probabilité qu'il fonctionne encore les 12 mois suivants.

Partie C : pannes d'origine mécanique et électronique

On admet que les événements $(D \geq 48)$ et $(T \geq 48)$ sont indépendants.

Déterminer la probabilité que le climatiseur ne subisse aucune panne avant 48 mois.

Partie D : cas particulier d'un garage de l'enseigne

Un garage de l'enseigne a étudié les fiches d'entretien de 300 climatiseurs de plus de 4 ans. Il constate que 246 d'entre eux ont leur module mécanique en état de fonctionnement depuis 4 ans.

Ce bilan doit-il remettre en cause le résultat donné par le service statistique de l'enseigne, à savoir que $p(D \geq 48) = 0{,}7977$? Justifier la réponse.