DEVOIR SURVEILLÉ – 1S
Second degré : le corrigé

Exercice 1

1) Résolution d'équations :

a / $2x^2+5x-3=0$ en utilisant le discriminant :

On reconnaît un polynôme de degré 2. Calcul de Δ : $\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times 2\times(-3) = 25+24 = 49$

$\Delta > 0$, le polynôme admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5-\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5-7}{4} = -3 \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5+\sqrt{49}}{2\times 2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$S = \left\{-3\,;\frac{1}{2}\right\}$$

b / $2x^2-2x-\frac{3}{2}=0$, en utilisant la forme canonique puis la forme factorisée, si elle existe :

$$2x^2-2x-\frac{3}{2} = 2\left(x^2-x-\frac{3}{4}\right) = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right] = 2\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1\right] = \boxed{2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-2}$$

$$2x^2-2x-\tfrac{3}{2} = 2\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2-1\right] = 2\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$2\left(x-\tfrac{3}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x-\tfrac{3}{2}=0 \quad ou \quad x+\tfrac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow x = \tfrac{3}{2} \qquad ou \qquad x = -\tfrac{1}{2}$$

$$S = \left\{-\tfrac{1}{2}\ ;\ \tfrac{3}{2}\right\}$$

c / $2x^4+x^2-1=0$, en effectuant un changement de variable :

Posons $X=x^2$. L'équation s'écrit alors : $2X^2+X-1=0$. C'est un polynôme du second degré, calculons Δ :

$\Delta = b^2-4ac = 1^2-4\times 2\times(-1) = 1+8 = 9$. $\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-1-3}{4} = -1 \quad ; \quad X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$$

- $X_1 = -1 \Leftrightarrow x^2 = -1$ *absurde (un carré est toujours positif)*
- $X_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad x = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$S = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

2) a / Résolution de l'inéquation : $2x+3x^2 \leq 1$:

$2x+3x^2 \leq 1 \Leftrightarrow \underbrace{3x^2+2x-1}_{P(x)} \leq 0$. P est un polynôme de degré 2 qui admet une racine évidente : -1.

$$P(x)=3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)$$

Soit P le produit des racines : $P=x_1\times x_2=-1\times x_2=-\frac{1}{3}$ d'où $x_2=\frac{1}{3}$.

Le polynôme a le signe de « a » donc positif sauf entre les racines. Il est négatif entre les racines.

D'où : $S=\left[-1\,;\,\frac{1}{3}\right]$

b / Signe du polynôme P défini par : $P(x)=100x^2+60x+9$:

$P(x)=(10x)^2+2\times(10x)\times 3+3^2=(10x+3)^2$.

Ainsi : $P(x)=0 \Leftrightarrow 10x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{10}$

$P(x)>0 \quad pour \quad x\neq -\frac{3}{10}$.

3) Le polynôme ax^2+6x+1 possède une racine double. On a donc $\Delta=0$.

Calculons Δ : $\Delta=b^2-4ac=6^2-4\times a\times 1=36-4a$. Ainsi $\Delta=0 \Leftrightarrow 36-4a=0 \Leftrightarrow -4a=-36 \Leftrightarrow a=\frac{-36}{-4}=9$

Conclusion : Ce polynôme admet une racine double ssi $a=9$.

Exercice 2

➨ Répondre par VRAI ou FAUX en justifiant la réponse :

On pose $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\,,b\,;c$ sont trois réels et $a\neq 0$.

a / Si $c=0$ alors $f(x)=0$ n'admet aucune solution : **FAUX**

$c=0$, on a alors $f(x)=ax^2+bx=x(ax+b)$. Ainsi $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad x=-\frac{b}{a}$.

Le polynôme admet donc 2 racines distinctes.

b / Si $f(x)\geq 0$ alors $\Delta>0$: **FAUX**

Tout polynôme de degré 2 qui s'écrit sous la forme : $P(x)=(ax+b)^2$ vérifie $P(x)\geq 0$.

c / Si $a>0$ et $c<0$ alors l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions : **VRAI**

Si $a>0$ et $c<0$ alors $\left.\begin{matrix} b^2\geq 0 \\ -4ac>0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta=b^2-4ac>0$ et le polynôme admet deux racines réelles distinctes.

d / x^2+x-3 change deux fois de signe : **VRAI**

On reconnaît un polynôme de degré 2. Calculons son discriminant : $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times 1\times(-3)=13$.

$\Delta>0$ donc le polynôme admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. Supposons que : $x_1<x_2$

Le polynôme a le signe de « a » donc positif sauf entre les racines.

Ce polynôme change donc une première fois de signe avant et après x_1 puis change une seconde fois de signe avant et après x_2.

Exercice 3

Soit $f(x)=x^2+mx+m$ où m désigne un nombre réel.

1 / 1 est une racine de f signifie que $f(1)=0$ cad : $1^2+m\times 1+m=0 \Leftrightarrow 1+2m=0 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Déterminons l'autre racine : $f(x)$ est de la forme x^2-Sx+P où S est la somme des racines et P est le produit des racines. On lit alors : $P=x_1\times x_2=1\times x_2=m \Leftrightarrow x_2=m$. L'autre racine est m.

2 / Calcul du discriminant Δ de f : $\Delta=b^2-4ac=m^2-4\times 1\times m=m^2-4m=m(m-4)$

a / f admet deux racines ssi $\Delta>0$. Étudions le signe de Δ : c'est un polynôme de degré 2, de variable m, qui admet deux racines réelles 0 et 4.

Δ a le signe de « a » donc positif à l'extérieur des racines. Ainsi $\Delta>0 \Leftrightarrow m\in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]4\,;+\infty[$

conclusion : f admet deux racines pour $m\in\,]-\infty\,;0[\,\cup\,]4\,;+\infty[$.

b / $f(x)=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\frac{m^2}{4}+m$. On lit alors que f admet un minimum (puisque $a>0$) qui vaut $-\frac{m^2}{4}+m$ qui est atteint en $x=-\frac{m}{2}$.

Exercice 4

Les questions suivantes sont indépendantes.

1) Déterminons deux nombres x et y solutions de : $\begin{cases} S=x+y=\frac{10}{3} \\ P=xy=1 \end{cases}$:

x et y sont solutions de l'équation : $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{10}{3}x+1=0$

C'est un polynôme de degré 2, calculons Δ : $\Delta=b^2-4ac=\left(-\frac{10}{3}\right)^2-4\times 1\times 1=\frac{100}{9}-\frac{36}{9}=\frac{64}{9}$.

$\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{10}{3}-\sqrt{\frac{64}{9}}}{2}=\frac{\frac{10}{3}-\frac{8}{3}}{2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\frac{10}{3}+\sqrt{\frac{64}{9}}}{2}=\frac{\frac{10}{3}+\frac{8}{3}}{2}=\frac{\frac{18}{3}}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$S=\left\{\left(\tfrac{1}{3}\,;3\right)\,;\,\left(3\,;\tfrac{1}{3}\right)\right\}$$

2) On donne : $A=\dfrac{3x^2-6x-6}{x^2-(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x)=3x^2-6x-6$ et $Q(x)=x^2-(\sqrt{3}+2)x+(\sqrt{3}+1)$.

Déterminons les écritures factorisées (si elles existent) de chacun de ces deux polynômes de degré 2 :

• $P(x)=3x^2-6x-6=3(x^2-2x-2)$. $P(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0$.

Calculons Δ : $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 1\times(-2)=4+8=12$.

$\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes.

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2-\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2-2\sqrt{3}}{2}=1-\sqrt{3}$ *et* $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2+2\sqrt{3}}{2}=1+\sqrt{3}$

Ainsi $P(x)=3(x-1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$

• $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{3}+2\right)x+\left(\sqrt{3}+1\right)$: polynôme qui admet 1 pour racine évidente.

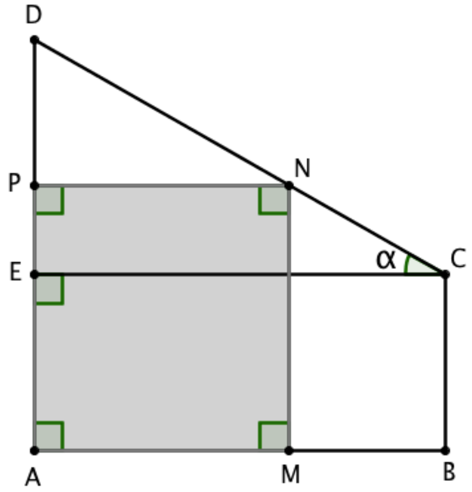
$P=x_1\times x_2=1\times x_2=\sqrt{3}+1$ *cad* $x_2=\sqrt{3}+1$.

Ainsi $Q(x)=(x-1)\left(x-1-\sqrt{3}\right)$.

On obtient alors : $A=\dfrac{3\left(x-1+\sqrt{3}\right)\cancel{\left(x-1-\sqrt{3}\right)}}{(x-1)\cancel{\left(x-1-\sqrt{3}\right)}}=\dfrac{3\left(x-1+\sqrt{3}\right)}{(x-1)}$

Exercice 5

On souhaite poser des panneaux solaires sur un toit qui a la forme d'un trapèze rectangle représenté ci-dessous par le quadrilatère $ABCD$.
Les panneaux solaires sont représentés par le rectangle $MAPN$.



$AB=8\ m$

$AD=7\ m$

$CB=3\ m$

On note h la longueur AP en m et $A(h)$ l'aire du rectangle $MAPN$ en m^2.

1) Calcul de $\tan\alpha$ dans le triangle rectangle CED : $\tan\alpha=\dfrac{DE}{EC}=\dfrac{AD-AE}{EC}=\dfrac{7-3}{8}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$ (1)

2) $\left.\begin{array}{l}\alpha \text{ et } \widehat{PND} \text{ sont complémentaires}\\ (EC)//(PN)\end{array}\right\}$ *alors* $\widehat{PND}=\alpha$

Dans le triangle (PND), $\tan\alpha=\dfrac{DP}{PN}=\dfrac{AD-AP}{PN}=\dfrac{7-h}{PN}$ (2).

On a donc d'après (1) et (2) : $\dfrac{1}{2}=\dfrac{7-h}{PN}$ d'où $PN=2(7-h)=14-2h$ **CQFD**

3) $A(h)=AP\times PN=h(14-2h)$

4) $$\begin{aligned}A(h)>24 &\Leftrightarrow h(14-2h)>24 \Leftrightarrow -2h^2+14h-24>0\\ &\Leftrightarrow -2\left(h^2-7h+12\right)>0\\ &\Leftrightarrow h^2-7h+12<0\end{aligned}$$

Déterminons les racines de $P(h)=h^2-7h+12$: polynôme de degré 2. calculons Δ :

$\Delta=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times12=49-48=1$. $\Delta>0$, on a deux racines réelles distinctes.

$h_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7-\sqrt{1}}{2}=\dfrac{6}{2}=3$ *et* $h_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{7+1}{2}=\dfrac{8}{2}=4$.

$P(h)$ a le signe de « a » donc positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

conclusion : $A(h)>0 \Leftrightarrow h\in\,]3\,;4[$

5) Tableau de variations de $A(h)$:

$$A(h)=-2h^2+14h=-2(h^2-7h)=-2\left[\left(h-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}\right]=-2\left(h-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{2}.$$

Comme « a » est négatif, la parabole est tournée vers le bas. On obtient alors :

h	0	$\frac{7}{2}$	7
$A(h)$	0 ↗	$\frac{49}{2}$	↘ 0

L'aire maximale de $MAPN$ est $\frac{49}{2}=24{,}5m^2$.

BONUS

1) Soit P un polynôme de degré 2 tel que : $P(x+1)-P(x)=2x$ et $P(0)=0$:

posons $P(x)=ax^2+bx+c$.

$$\begin{aligned}
P(x+1)-P(x)=2x &\Leftrightarrow a(x+1)^2+b(x+1)+c-ax^2-bx-c=2x\\
&\Leftrightarrow \cancel{ax^2}+2ax+a+\cancel{bx}+b+\cancel{c}-\cancel{ax^2}-\cancel{bx}-\cancel{c}=2x\\
&\Leftrightarrow 2ax+a+b=2x\\
&\Leftrightarrow \begin{cases}2a=2\\ a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=-a=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $P(x)=x^2-x+c$. De plus $P(0)=0 \Leftrightarrow 0^2-0+c=0 \Leftrightarrow c=0$.

ainsi $P(x)=x^2-x=x(x-1)$.

2)

$$\begin{aligned}
S=2+4+\ldots+2n&=2\times1+2\times2+\ldots+2\times n\\
&=\cancel{P(2)}-P(1)+\cancel{P(3)}-\cancel{P(2)}+\ldots+P(n+1)-\cancel{P(n)}\\
&=P(n+1)-P(1)\\
&=(n+1)\times n-1\times 0\\
&=n(n+1)
\end{aligned}$$

3) Somme des n premiers entiers naturels non nuls :

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}(2+4+6+\ldots+2n)=\frac{1}{2}\times n(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}$$